یونٹ نمبر 18

تغیرات
VARIATIONS

طلباء کے آزموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کر سکیں
- تیسرا، چوتھا، وسطی اور مسلسل تناسب معلوم کر سکیں۔
- عکس نسبت (Invertendo)، ابدال نسبت (Alternando) ، ترکیب نسبت (Components)، تفصیل نسبت (Dividendo)، تفصیل و ترکیب نسبت ، تناسب معلوم کرنے کے لیے مسئلہ کا اطلاق کر سکیں۔
- مشترکہ تغیرات کی تعریف کر سکیں
- مشترکہ تغیرات سے متعلق مسائل حل کر سکیں
- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی شرطیہ مساوات ثابت کر سکیں۔
- تغیرات پر مبنی روز مرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں

18.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (Ratio, Proportions and variations)

18.1.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (راست و معکوس) کی تعریف کرنا

(a) نسبت (Ratio):

ایک ہی اکائی کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت ہے۔ یہ ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا باہمی تعلق ہے دوسرے الفاظ میں نسبت کا مطلب ہے۔ اگر a اور b ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں اور b صفر نہیں ہے تو a اور b کی نسبت کو یوں لکھا جاتا ہے : $a:b$ یا $\frac{a}{b}$

مثلاً: اگر ایک جماعت میں 13 لڑکے اور 8 لڑکیاں ہیں تو لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کی نسبت کو یوں 13:8 یا $\frac{13}{8}$ کسر میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

نوٹ:

(i) نسبت میں رقموں کی ترتیب اہم ہوتی ہے

(ii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی ہے

(iii) نسبت $a:b$ میں پہلی رقم (First term) مقدم (Antecedent) اور دوسری رقم (Second term) مؤخر (Consequent) کہلاتی ہے

مثال 1: نسبت معلوم کریں:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر
(ii) 700 گرام اور 2 کلوگرام
(iii) 300 سیکنڈ اور 2 منٹ
(iv) 200 روپے اور 300 گرام

حل:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر کی نسبت

$$400:\ 900 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9} = 4:9$$

400 : 900 کی مختصر ترین صورت 4 : 9 ہے

(ii) 700 گرام اور 2 کلوگرام کی نسبت

چونکہ 1 کلوگرام = 1000 گرام

اس لیئے 2 کلوگرام = 2000 گرام

اب

$$700:\ 2000 = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20} = 7:20$$

(iii) 30 سیکنڈ اور 2 منٹ

چونکہ 1 منٹ = 60 سیکنڈ

اس لیئے 2 منٹ = 120 سیکنڈ

اب

$$30:\ 120 = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 1:4$$

(iv) 200 روپے اور 300 گرام کی نسبت

چونکہ مقداریں ایک قسم کی نہیں ہیں لہذا 200 روپے اور 300 گرام کے درمیان نسبت معلوم نہیں کی جا سکتی ہے

مثال2: نسبت $5a + 2b : 4a + 3b$ معلوم کریں اگر $a : b = 4 : 5$

حل: دیا گیا ہے کہ $a : b = 4 : 5$ یا $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

اب

$$5a + 2b : 4a + 3b = \frac{5a + 2b}{4a + 3b}$$

$$= \frac{\frac{5a+2b}{b}}{\frac{4a+3b}{b}} = \frac{5(\frac{a}{b})+2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b})+3(\frac{b}{b})}$$ (شمار کنندہ اور نسبت نما کو b سے تقسیم کرنے سے)

$$= \frac{5(\frac{4}{5})+2}{4(\frac{4}{5})+3} = \frac{4+2}{\frac{16}{5}+3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31} \qquad \left(\because \frac{a}{b} = \frac{4}{5}\right)$$

پس $5a + 2b : 4a + 3b = 30 : 31$

مثال 3: m کی قیمت معلوم کریں $3m + 5 : 4m + 3$ اور $2 : 3$ برابر ہیں

حل:

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \quad \frac{3m+5}{4m+3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3(3m+5) = 2(4m+3)$$

$$\Rightarrow \quad 9m + 15 = 8m + 6$$

$$\Rightarrow \quad 9m - 8m = 6 - 15$$

$$\Rightarrow \quad m = -9$$

پس m کی مطلوبہ قیمت 9- ہے

مثال4: نسبت 4:15 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ $\frac{2}{3}$ کے برابر ہو جائے

حل: فرض کریں کہ مطلوبہ عدد a ہے

دی گئی شرط کے مطابق

$$\Rightarrow \quad \frac{4+a}{15+a} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3(4+a) = 2(15+a)$$

$$\Rightarrow \quad 12 + 3a = 30 + 2a$$

$$\Rightarrow \quad 3a - 2a = 30 - 12$$

$$\Rightarrow \quad a = 18$$

پس مطلوبہ عدد 18 ہے۔

(d) تناسب (Proportion):

دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے جن کو دو نسبتوں کے برابر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو a، b، c اور d تناسب میں ہیں اور ہم یوں لکھ سکتے ہیں: $a : b :: c : d$ جبکہ مقداریں a اور d طرفین جبکہ b اور c وسطین کہلاتی ہیں a، b، c اور d کا تناسب یوں لکھا جاتا ہے

$$a : b :: c : d$$

یا $a : b = c : d$

یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

یا $ad = bc$

نوٹ: طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

مثال 5: x کی قیمت معلوم کریں اگر $40:60=50:x$

حل: دیا گیا ہے $40:60=50:x$

چونکہ طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب

یعنی $40x=60\times 50$

یا $x=\dfrac{60\times 50}{40}=75$

لہذا $x = 75$

مشق 18.1

1. مندرجہ ذیل کی نسبت معلوم کریں:

(i) 70 کلوگرام اور 25 کلوگرام
(ii) 60 سنٹی میٹر سنٹی میٹر اور 1 میٹر
(iii) 40 سیکنڈ اور 3 منٹ
(iv) 200 ملی لیٹر اور 2 لیٹر
(v) $135°$ اور $360°$
(vi) 3.5 کلوگرام، 5 کلوگرام 200 گرام

2. ایک فیکٹری میں 120 کام کرنے والے ہیں جس میں 45 عورتیں ہیں اور باقی مرد ہیں۔ نسبت معلوم کریں:

(i) مرد اور عورتیں
(ii) عورتیں اور مرد
(iii) عورتیں اور کل کام کرنے والے
(iv) مرد اور کل کام کرنے والے

3. اگر $5(4x-2y)=3x-4y$ تو $x:y$ معلوم کریں

4. "a" کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $3a+4:2a+5$ اور $4:3$ برابر ہیں۔

5. نسبت 5:27 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ 1:3 کے برابر ہو جائے.

6. اگر $a:b=5:8$ تو $3a+4b:5a+7b$ کی قیمت معلوم کریں

7. مندرجہ ذیل میں x معلوم کریں

(i) $2x+5:5::3x-2:7$
(ii) $\dfrac{4x-3}{5}:\dfrac{3}{4}::\dfrac{4x}{3}:\dfrac{7}{2}$
(iii) $\dfrac{x-3}{2}:\dfrac{5}{x-1}::\dfrac{x-1}{3}:\dfrac{4}{x+4}$
(iv) $(a^2-ab+b^2):x::\dfrac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$
(v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) تغیر (Variation):

تغیر کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی دوسری مقدار میں تبدیلی کا باعث ہے۔ تغیرات دو اقسام کے ہوتے ہیں

- تغیر راست (Direct Variation)
- تغیر معکوس (Inverse Variation)

تغیر راست (Direct variation):

اگر دو مقداروں A اور B کے درمیان ایسا تعلق ہے جس میں ایک مقدار A دی گئی نسبت سے بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار A بھی اُسی نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہے۔ اگر مقدار y اور مقدار x میں تغیر راست ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں:

$y\propto x$ یا $y=k\,x$ جبکہ $k\neq 0$

علامت "$\propto$" تناسب یا تغیر کی علامت کہلاتی ہے اور k ایک (Constant of variation) مستقل کہلاتا ہے۔

مثال طور:

(i) مربع کے ضلع کی لمبائی اور اس کے رقبے میں تغیر راست ہوتا ہے۔

(ii) سائیکل کی رفتار اور طے کردہ فاصلے میں تغیر راست ہوتا ہے

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر راست ہے تو معلوم کریں

(a) x اور y کو منسلک کرنے والی مساوات (b) x اور y میں تعلق جبکہ $x=3$ اور $y=7$

(c) y کی قیمت جبکہ $x=24$ (d) x کی قیمت جبکہ $y=21$

حل: (a) جیسے کے y میں x تغیر راست ہے۔

لہذا $y \propto x$

یعنی $y = kx \quad \ldots (i)$

جبکہ k تغیر کا متقل ہے

(b) مساوات (i) میں $x = 3$ اور $y = 7$ رکھنے سے،

ہمیں ملا $7=3k$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{3}$$

مساوات (i) میں x کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}x \quad \ldots(ii)$

(c) مساوات (ii) میں $x = 24$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا $y = \frac{7}{3}(24) = 56$

(d) مساوات (ii) میں $y = 21$ کی قیمت رکھنے سے، ہمیں ملا

$$21 = \frac{7}{3}x \Rightarrow x = \frac{3 \times 21}{7} = 9$$

مثال 2: اگر y اور x کے جزرالمربع میں تغیر راست ہے، جبکہ $x=16$ اور $y=10$

تو معلوم کریں جبکہ $x = 36$

حل: y اور x کے جزرالمربع میں تغیر راست ہے۔

یعنی $y \propto \sqrt{x}$

یا $y = k\sqrt{x} \quad \ldots (i)$

جبکہ k تغیر کا متقل ہے۔

مساوات (i) میں $x = 16$ اور $y = 10$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$10 = k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

مساوات (i) میں $k = \frac{5}{2}$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{x} \quad \ldots(ii)$$

مساوات (ii) میں $x = 36$ رکھنے سے ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2}(6) = 15$$

مثال 3: اگر V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے اور $V=\frac{792}{7}$ جبکہ $r=3$
V کی قیمت معلوم کریں جبکہ $r=7$

حل: چونکہ V اور r کے مکعب میں تغیر راست ہے

لہٰذا $V \propto r^3$

$V = kr^3$ (i) (جبکہ k تغیر کا مستقل ہے)

مساوات (i) میں $r=3$ اور $V=\frac{792}{7}$ رکھنے سے

ہمیں ملا $\frac{792}{7} = k(3)^3 \Rightarrow k = \frac{792}{7\times 27} = \frac{88}{21}$

پس $V = \frac{88}{21}r^3$ ... (ii)

مساوات (ii) میں $r=7$ رکھنے سے

ہمیں ملا $V = \frac{88}{21}(7)^3 = \frac{4312}{3}$

تغیر معکوس (Inverse Variation):

اگر دو متغیرات (مقداروں) میں اس طرح تعلق ہے ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے اور اس کا الٹ تو مقداروں (متغیرات) کے دوسرے کے تغیر معکوس ہوتے ہیں۔ اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو تو ہم یوں کہتے ہیں۔

$$y \propto \frac{1}{x} \quad \text{یا} \quad y = \frac{k}{x} \quad \text{جبکہ} \quad k \neq 0 \quad (\text{تغیر کا مستقل})$$

$$\Rightarrow \quad yx = k$$

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y=7$ جبکہ $x=2$ تو y کی قیمت معلوم کریں اگر $x=126$

حل: یہاں y اور x میں تغیر معکوس ہے

یعنی $y \propto \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = k(\frac{1}{x}) = \frac{k}{x}$

$\Rightarrow k = xy$ ... (i)

مساوات (i) میں $y=7$ اور $x=2$ رکھنے سے

ہمیں ملا $k=(2)(7)=14$

$\Rightarrow xy = 14$ ... (ii)

مساوات (ii) میں $x=126$ رکھنے سے

ہمیں ملا $(126)y = 14$

$y = \frac{14}{126}$

$y = \frac{1}{9}$

مثال 2: اگر y اور x معکب میں تغیر معکوس ہے اور $y=27$ اور $x=8$ تو x معلوم کریں جبکہ $y=36$

حل: یہاں y اور $\sqrt[3]{x}$ میں تغیر معکوس ہے

یعنی $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

یا $y = \frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y\left(\sqrt[3]{x}\right) = k$ ... (i)

مساوات (i) میں $x=8$ اور $y=27$ رکھنے سے

ہمیں ملا $k = (27)(\sqrt[3]{8}) = 54$

اب مساوات (i) میں $k=54$ رکھنے سے

ہمیں ملا $\left(y\sqrt[3]{x}\right) = 54$ ... (ii)

اب مساوات (ii) میں $y=36$ رکھنے سے

ہمیں ملا $(36)\left(\sqrt[3]{x}\right) = 54$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{27}{8}$

مشق 18.2

1. اگر y اور x میں تغیر راست ہے اور $y = 10$ جبکہ $x = 3$ تو معلوم کریں
   (i) x کی صورت میں y (ii) y جبکہ $x = 6$ (iii) x جبکہ $y = 15$
2. اگر $V \propto T$ اور $V = 15$ جبکہ $T = 24$ تو معلوم کریں
   (i) V اور T منسلک کرنے والی مساوات (ii) $V = 10$ (iii) $T = 30$
3. اگر $u \propto \sqrt[3]{v}$ اور $u = 4$ جب $v = 64$ تو u کی قیمت معلوم کریں جبکہ $v = 216$ اور v کی قیمت جبکہ $u = 5$
4. اگر F اور m^3 میں تغیر راست ہے جب $m = 3$ اور $F = 81$ تو F معلوم کریں جبکہ $m = 5$
5. اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے جب $y = 10$ اور $x = 3$ تو y معلوم کریں جبکہ $x = 10$
6. گیس کا حجم V اور دباؤ P کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے اگر $V = 12$ جبکہ $P = 9$ معلوم کریں جبکہ $V = 4$
7. اگر $F \propto \frac{1}{r^2}$ اور $F = 8$ جب $r = 2$ تو معلوم کریں
   (i) F جبکہ $r = 5$ (ii) r جبکہ $F = 24$
8. x کے جذر المکعب اور y کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے اگر $x = 8$ جب $y = 3$ معلوم کریں جب $y = \frac{3}{2}$
9. دو اجسام کے درمیان قوت F اور ان مراکز کے درمیان فاصلہ d کے مربعے میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $F = 2$ اور $d = 3$ تو d معلوم کریں جب $F = 72$
10. اگر y اور $(x-5)$ میں تغیر معکوس ہے جب کہ $y = 6$ اور $x = 8$ تو y معلوم کریں جب $x = 10$

18.1(ii) تیسرا، چوتھا تناسب کے متناسب اور مسلسل تناسب میں وسطی متناسب معلوم کرنا۔

ہم تناسب سے پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر a، b، c اور d تناسب میں ہیں تو $a:b::c:d$

لہٰذا a، b، c اور d بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا اور چوتھا متناسب کہلاتے ہیں

(a) تیسرا متناسب (Third Proportional):

مثال 1:

اگر 4، 7 اور 14 تناسب میں پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو اس کا تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$4:7::x:14$$
$$\Rightarrow \quad 7x = 56$$
$$\Rightarrow \quad x = 8$$

مثال 2:

اگر $(a-b)$، (a^2+ab+b^2) اور (a^3-b^3) بالترتیب پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں تو تیسرا متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا متناسب ہے
تو

$$(a-b):(a^2+ab+b^2)::x:a^3-b^3$$
$$\Rightarrow \quad (a^2+ab+b^2)x = (a-b)(a^3-b^3)$$
$$(a^2+ab+b^2)\,x = (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)}$$
$$\Rightarrow \quad x = (a-b)^2$$

(b) چوتھا متناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوتھا متناسب معلوم کریں اگر پہلے تین متناسب a^3+b^3، $a-b$ اور a^2-ab+b^2 ہیں

حل: فرض کریں چوتھا متناسب x ہے تو

$$a^3+b^3 : a-b :: (a^2-ab+b^2) : x$$

یعنی

$$x\,(a^3+b^3) = (a-b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a-b}{a+b}$$

مسلسل متناسب (Continued Proportion) اور وسطی متناسب (Mean Proportional):

مقداریں a، b، c مسلسل تناسب کہلاتیں ہیں اگر

$$a:b = b:c$$

یا

$$a:b :: b:c$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

لہذا b وسطی متناسب کہلاتا ہے

مثال 1: x^2-y^2 اور $\frac{x-y}{x+y}$ کا وسطی متناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں z وسطی متناسب ہے تو

$$x^2-y^2 : z :: z : \frac{x-y}{x+y}$$

یعنی

$$z^2 = (x^2-y^2)\frac{(x-y)}{x+y} = (x-y)^2$$

$$\Rightarrow \quad z = x-y$$

مثال 2: a کی قیمت معلوم کریں اگر 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

حل: چونکہ 7، $a-3$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

پس

$$7 : a-3 :: a-3 : 28$$

یعنی

$$(a-3)^2 = 7\times 28$$

$$\Rightarrow \quad (a-3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow \quad a-3 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 14+3$$

$$\Rightarrow \quad a = 17$$

مشق 18.3

1. تیسرا متناسب معلوم کریں اگر پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں

(i) 6، 18 اور 54 (ii) a^2-b^2، $a+b$ اور $a-b$

(iii) $(x+y)^2$، x^3+y^3 اور $x+y$ (iv) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$، $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$ اور $a+b$

2. چوتھا متناسب معلوم کریں

(i) 8, 4, 2 (ii) $a^3+b^3,\ a^2-b^2,\ a^2-ab+b^2$

(iii) $a^2-8a+12,\ a-2,\ 2a^3-12a^2$

(iv) $(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2), a^3+b^3, a^3-b^3$

3. وسطی متناسب معلوم کریں

(i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 20a^3b^2$

(iii) $a^4-b^4, \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (iv) $a^3-b^3, \dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}$

4. مندرجہ ذیل مسلسل تناسب میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $45, x, 5$ (ii) $16, x, 9$

(iii) $12, 3x-6, 27$ (iv) $7, x-3, 112$

18.2 تناسب سے متعلق مسئلے

18.2.1 عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت، تفصیل نسبت کے مسئلوں کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

(i) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of invertendo):

اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$

اوپر دیا گیا بیان مسئلہ عکس نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad \text{(دونوں اطراف معکوس لینے سے)}$$

یعنی $b:a=d:c$ پس ثابت ہوا

مثلاً: (i) اگر $2:3=4:6$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$3:2=6:4$$

(ii) اگر $4p:5q=2r:5s$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$5q:4p=5s:2r$$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando):

اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$

یہاں مسئلہ ابدال نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b=c:d$

یا $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

$$\Rightarrow \quad ad=bc$$

دونوں اطراف cd سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

ہمیں ملا $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

یعنی $a:c=b:d$

مثال:

(i) اگر $2:5=6:15$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$2:6=5:15$$

(ii) اگر $4p-1:2-3q=5+2r:2s+1$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$4p-1:5+2r=2-3q:2s+1$$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب نسبت کے مطابق

(i) $a+b:b=c+d:d$ (ii) $a:a+b=c:c+d$

ثبوت: (i) چونکہ $a:b=c:d$

تو $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

یا $a+b:b=c+d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت: (ii) چونکہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

تو $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

یا دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$$

$$\frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b+a}=\frac{c}{c+d}$$

یا $a:a+b=c:c+d$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $p+2:q=r:s-3$ تو مسئلہ ترکیب نسبت (i) کی رو سے

$$p+2+q:q=r+s-3:s-3$$

اس ہی طرح، مسئلہ ترکیب نسبت (ii) کی رو سے

$$p+2:p+2+q=r:r+s-3$$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

(i) $a-b:b=c-d:d$ (ii) $a:a-b=c:c-d$

ثبوت:(i) چونکہ $a:b=c:d$

یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

یا $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

یا $a-b:b=c-d:d$

پس ثابت ہوا

ثبوت:(ii) چونکہ $a:b=c:d$

لہذا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے

$\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$

$\Rightarrow \quad \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

یا $a:b-a=c:d-c$

پس ثابت ہوا

مثال: اگر $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تو ثابت کریں کہ

$m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

حل: چونکہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$$\Rightarrow \quad \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$$

تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$$

یعنی $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$

پس ثابت ہوا

(v) ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of componendo and dividendo):

اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$

(ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال 1: اگر $m:n=p:q$ تو ثابت کریں کہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

حل: چونکہ $m:n=p:q$

لہذا $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

دونوں اطراف $\frac{3}{2}$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{3m}{2n}=\frac{3p}{2q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (ii) کی رو سے

$$\frac{3m-2n}{3m+2n}=\frac{3p-2q}{3p+2q}$$

یا $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$

پس ثابت ہوا

مثال 2: اگر $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$ تو ثابت کریں کہ $p:q=r:s$

حل: چونکہ $3p+4q:3p-4q=3r+4s:3r-4s$

بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (i)

$$\therefore \quad \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)}=\frac{(3r+4s)+3r-4s}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q}=\frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q}=\frac{6r}{8s}$$ (دونوں اطراف $\frac{6}{8}$ کاٹنے سے)

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}$$

یا $p:q=r:s$

پس ثابت ہوا

مثال 3: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت x کی قیمت معلوم کریں

اگر $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

حل: ہمارے پاس: $$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}=\frac{2}{5}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}=\frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}}=\frac{7}{-3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}}=\frac{7}{3}$$

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$\frac{x+6}{x-6}=\frac{49}{9}$$

$$9x+54=49x-294$$

$$9x-49x=-294-54$$

$$-40x=-348$$

$$x=\frac{348}{40}=\frac{87}{10}$$

مثال4: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل مساوات $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$ کو حل کریں

حل: ہمارے پاس: $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2+(x-1)^2+(x+3)^2-(x-1)^2}{(x+3)^2+(x-1)^2-(x+3)^2+(x-1)^2}=\frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2}=\frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-1}=\pm 3$$

$\frac{x+3}{x-1}=3$ یا $\frac{x+3}{x-1}=-3$

$x+3=3x-3$ $x+3=-3x+3$

$-2x=-6$ $4x=0$

$x=3$ $x=0$

اس لیے حل سیٹ $\{0,3\}$ ہے

مثال 5: ثابت کریں کہ $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}:\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$ اگر $a:b=c:d$

حل:

چونکہ $\frac{ac^2-bd^2}{ac^2+bd^2}=\frac{c^3-d^3}{c^3+d^3}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{ac^2-bd^2+ac^2+bd^2}{ac^2-bd^2-ac^2-bd^2}=\frac{c^3-d^3+c^3+d^3}{c^3-d^3-c^3-d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2}=\frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

یا $a:b=c:d$

پس ثابت ہوا.

مشق 18.4

1. اگر $x:y=z:w$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{4x+3y}{4x-3y}=\frac{4z+3w}{4z-3w}$ (ii) $\frac{5x-3y}{5x+3y}=\frac{5z-3w}{5z+3w}$

(iii) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{z^3+w^3}{z^3-w^3}$ (iv) $\frac{3x+2y}{3x-2y}=\frac{3z+2w}{3z-2w}$

(v) $\frac{2x+3y+2z+3w}{2x+3y-2z-3w}=\frac{2x-3y+2z-3w}{2x-3y-2z+3w}$

2. ثابت کہ $a:b=c:d$ اگر

(i) $a^2-b^2:a^2+b^2=ac-bd:ac+bd$

(ii) $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

3. مندرجہ ذیل مساوات کو بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت حل کریں

(i) $\frac{(x+3)^2-(x-5)^2}{(x+3)^2+(x-5)^2}=\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}=\frac{1}{10}$ (iv) $\frac{(x+3)^2+(x-1)^2}{(x+3)^2-(x-1)^2}=\frac{5}{4}$

18.3 مشترکہ تغیر (Joint Variation):

18.3(i) مشترکہ تغیر کی تعریف

مشترکہ تغیر ایک تغیر یا ایک سے زائد تغیرات پر منحصر ہوتا ہے۔ مشترکہ تغیریت واقع ہوتا ہے جب ایک تغیر دوسرے کئی متغیرات کے ساتھ تغیر راست یا تغیر معکوس ہوتا ہے۔

مثلاً: (i) اگر x اور y ، z دونوں میں تغیر است ہو تو ہمارے پاس $x \propto yz$ $\Rightarrow x=kyz$

(ii) اگر x اور y تغیر است اور z میں تغیر معکوس ہے تو ہمارے پاس $x \propto \frac{y}{z} \Rightarrow x=\frac{ky}{z}$

18.3 (ii) مشترکہ تغیر سے متعلق مسائل حل کرنا:

مثال 1: اگر y اور xz^2 تغیر راست ہے اور $y=4$ جب $x=6$ اور $z=3$. y کی قیمت معلوم کریں جب $x=-81$ اور $z=5$

$$y \propto xz^2$$
$$y=k\,xz^2 \quad \text{(i)}$$

مساوات (i) میں $y=4$ $x=6$ اور $z=3$ رکھنے سے

$$4=k\,(6)\,(3)^2 \Rightarrow k=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

$k = \frac{2}{27}$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا
$$y = \frac{2}{27} x z^2 \quad ...(ii)$$

اب $x = -81$ اور $z = 5$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$y = \frac{2}{27} (-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$

مثال 2: اگر s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہو اور $s = 16$ جب $v = 4$، $t = 9$ اور $u = 24$

s کی قیمت معلوم کریں جب $t = 36, u = 25$ اور $v = 5$

حل: چونکہ s اور v^3 میں تغیر راست اور $\sqrt{t}$ اور u میں تغیر معکوس ہے۔

$$s \propto \frac{v^3}{u\sqrt{t}} \Rightarrow s = k\frac{v^3}{u\sqrt{t}} \quad ...(i)$$

$s = 16$، $t = 9$، $v = 4$ اور $u = 24$ مساوات (i) میں رکھنے سے

$$16 = \frac{k(4)^3}{\sqrt{9}(24)}$$

$$16 = \frac{k(64)}{72} \Rightarrow k = 16 \times \frac{72}{64} = 18$$

$k = 18$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

$$s = \frac{18\, v^3}{\sqrt{t}} \quad ...(ii)$$

$u = 25$، $t = 36$ اور $v = 5$ مساوات (ii) رکھنے سے

ہمیں ملا

$$s = \frac{18\,(5)^3}{\sqrt{36}\,(25)} = \frac{18 \times 125}{6 \times 25} = 15$$

مشق 18.5

1. اگر y کا x^2 اور z کے درمیان تغیر راست ہے اور $y = 6$ جب $x = 4$ ، $z = 9$ بطور x اور z کا تفاعل لکھیں اور y کی قیمت معلوم کریں جب $x = -8$ اور $z = 12$

2. اگر y کا x اور u^2 کے درمیان تغیر راست ہے اور v اور t کے درمیان تغیر معکوس ہے۔ $y = 40$ جب $x = 8$ ، $u = 5$ ، $v = 3$ اور $t = 2$ ۔ x u v اور t کی صورت میں y معلوم کریں۔ y کی قیمت بھی معلوم کریں جب $x = -2$، $v = 3$ ، $u = 4$

3. اگر w اور u^2 کے درمیان تغیر راست اور v کے جزر المکعب کے درمیان تغیر معکوس ہے اور $w = 216$ جب $u = 6$ اور $v = 27$۔ w کی قیمت معلوم کریں جب $u = 10$ اور $v = 125$

4. اگر سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T اور اُس کی لمبائی L کے جذر المربع میں تغیر راست اور ثقلی اسراع 'g' کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔

   اگر $T = 2$ سیکنڈ، $L = 100$ سینٹی میٹر اور $g = 9.8$ میٹر فی سیکنڈ تو سادہ پنڈولم کا ٹائم پریڈ T معلوم کریں جب $L = 200$ میٹر اور ایک مخصوص بلندی پر $g = 7.6$ ہے۔

5. ایک خاص گیس کا حجم V اور درجہ حرارت T میں تغیر راست اور دباؤ "P" کے جذر المربع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $V = 100$، $T = 30$ اور $P = 64$ ۔ V معلوم کریں جب $T = 60$ اور $P = 81$

18.4 k- طریقہ (K - Method):

جب دو یا دو سے زیادہ نسبتیں برابر ہوں تو ایک واحد علامت "k" کو متعارف کرتے ہوئے کئی مفید تناسب ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ ان مساوی نسبتوں کو "k" سے ظاہر کرتے ہیں۔ ہر نسبت کے لئے علامت k استعمال کرنے کے اس طریقے کو k طریقہ کہتے ہیں k طریقہ بہت سے مسائل حل کرنے میں بہت مفید ہے۔

(i) 18.4 k- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی مشترکہ مساوات ثابت کرنا:

اگر $a:b::c:d$ ایک تناسب ہے
تو بذریعہ k- طریقہ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = k \text{ اور } \frac{a}{b} = k$$

$$c = d\,k \;...\text{(ii)} \text{ اور } a = b\,k \;...\text{(i)}$$

ان مساوات کے ذریعے ہم تناسب سے متعلق مسائل حل کر سکتے ہیں

مثال 1: اگر $a:b::c:d$ تو ثابت کریں $\dfrac{8a-5b}{8a+5b} = \dfrac{8c-5d}{8c+5d}$

حل: چونکہ $a : b = c : d$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$

تو $c = dk$ ، $a = bk$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8bk-5b}{8bk+5b} = \frac{b(8k-5)}{b(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c+5d} = \frac{8dk-5d}{8dk+5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k+5)} = \frac{8k-5}{8k+5}$$

$$\because \quad \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\therefore \quad \frac{8a-5b}{8a+5b} = \frac{8c-5d}{8c+5d}$$

پس ثابت ہوا

مثال 2: اگر $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $\dfrac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \dfrac{ace}{bdf}$

حل: ہمارے پاس $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f}$

فرض کریں $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$

تو $\dfrac{e}{f} = k \quad \dfrac{c}{d} = k ، \dfrac{a}{b} = k$

$$\Rightarrow e = fk \text{ ؛ } \Rightarrow c = dk \Rightarrow a = bk$$

اب

$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{\left[k(b+d+f)\right]^3}{(b+d+f)^3} = k^3$$

$$\text{R.H.S} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf} = \frac{k^3bdf}{bdf} = k^3$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \quad \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf}$$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ تو ثابت کریں کہ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

حل: فرض کریں $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$

$$\Rightarrow \quad e = fk \text{ ؛ } c = dk, \; a = bk$$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) \\
&= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2) \\
&= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) \\
&= k^2(b^2+d^2+f^2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= (ab+cd+ef)^2 \\
&= \left[(bk)b+(dk)d+(fk)f\right]^2 \\
&= \left[k\,b^2+k\,d^2+k\,f^2\right]^2 \\
&= \left[k(b^2+d^2+f^2)\right]^2 \\
&= k^2(b^2+d^2+f^2)^2
\end{aligned}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$$\therefore \quad (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

پس ثابت ہوا

مشق 18.6

1. اگر $p : q = r : s$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{8p-3q}{8p+3q} = \frac{8r-3s}{8r+3s}$

(ii) $3\sqrt{\frac{p^3+r^3}{q^3+s^3}} = \frac{p}{q}$

(iii) $(p^2+q^2) : \frac{p^3}{p+q} = (r^2+s^2) : \frac{r^3}{r+s}$

(iv) $p^5+r^5 : q^5+s^5 = p^3\,r^2 : q^3\,s^2$

(v) $\frac{p-q}{p} : \frac{q}{p+q} = \frac{r-s}{r} : \frac{s}{r+s}$

2. اگر $a:b = c:d = e:f$ تو ثابت کریں

(i) $\frac{a^4\,b^2+a^2\,e^2-e^4f}{b^6+b^2\,f^2-f^5} = \frac{a^4}{b^4}$

(ii) $\frac{a^2\,b+c^2d+e^2f}{ab^2+cd^2+ef^2} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

(iii) $\frac{ac}{bd}+\frac{ce}{df}+\frac{ea}{fb} = \frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{e^2}{f^2}$

(ii) 18.4 تغیرات پر مبنی روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال 1: جسم کی مخفی توانائی کا جسم کی کمیت اور اونچی 'h' میں شتر کہ تغیر ہے اگر مخفی توانائی 1960 جول جب کہ m=2 کلو گرام اور اونچائی h=100 جسم کا وزن 5 کلو گرام اور اونچائی 300 میٹر ہے تو جسم کی مخفی توانائی معلوم کریں۔

حل:

$p \propto mh$

$p = kmh \ldots (i)$ (جبکہ k منتقل ہے)

$h = 100, m = 2$ اور $p = 1960$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $1960 = k(2)(100)$

$\Rightarrow k = \frac{1960}{200} = 9.8$

K کی قیمت مساوات (i) میں رکھنے سے

$p = 9.8mh \ldots (ii)$

اب اور مساوات (ii) میں $m=5$ ء $h = 300$ رکھنے سے

ہمیں ملا $p = 9.8(5)(300)$

$= 14700$ جول

مثال 2: ہک کے قانون کے مطابق اسپرینگ کو کھینچنے والی قوت اور کل طبائی میں تغیر راست ہے جب کہ F=64 پائونڈ S=3.2 انچ

(i) S معلوم کریں جب $F = 100$ lb

(ii) F جب $S = 0.4$ انچ

حل: چونکہ $F \propto S$

$\Rightarrow F=kS \ldots (i)$

F=64 اور S=3.2 مساوات (i) میں میں رکھنے سے

$64=3.2k$

$\Rightarrow k= \frac{64}{3.2} = 20$

K=20 مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20S \ldots (ii)$

(i) F=100 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $100=20S$

$\Rightarrow S=5$ انچ

(ii) S=0.4 مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $F=20(0.4)$

$= 8$ پائونڈ

مثال 3: مزدوری c اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دنوں کی تعداد d میں مشترکہ تغیر ہے اگر 200 مزدوروں کی 10 دنوں کی مزدوری 450,000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری معلوم کریں

حل: مزدوری کا مزدوروں کی تعداد اور دنوں میں تغیر راست ہے

$C \propto nd$

$C = knd \quad (i)$

$n = 200, C = 450,000$ اور $d = 10$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $450,000 = k(200)(10)$

$\Rightarrow k = \frac{450,000}{2000} = 225$

$k = 225$ مساوات (i) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \cdot nd \quad \cdots (ii)$

$n = 300$ اور $d = 16$ مساوات (ii) میں رکھنے سے

ہمیں ملا $C = 225 \times 300 \times 16$

$C = 1080000$

پس 300 مزدوروں کی 16 دنوں کی مزدوری 1080000 روپے ہے

مثال 4: ہاسٹل کے اخراجات طالب علموں کی تعداد کے مطابق کبھی ایک جیسے اور کبھی مختلف ہوتے ہیں۔ جب طالب علم 140 ہیں تو 200 طالب علموں کے لیئے 26500 روپے ہیں۔ 300 طالب علموں کے لیئے اخراجات معلوم کریں

حل: فرض کریں ایک جیسے اخراجات کو "C" اور مختلف اخراجات "Q" کو سے ظاہر کیا جاتا ہے x طلباء کی تعداد اور کل اخراجات کو P سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

چونکہ اخراجات اور طلباء کی تعداد میں تغیر راست ہے

$\because \quad Q \propto x$

$\therefore \quad Q = nx$ (n ایک متقل ہے)

$P = C + Q$

$P = C + nx$

دی گئی شرط کے مطابق

$19300 = C + 140n \quad ...(i)$ اور $26500 = C + 200n \quad ...(ii)$

$P = C + 300n \quad ...(iii)$

مساوات (i) اور (ii) سے ہمیں ملا: $C = 2500$ اور $n = 120$

اب مساوات (iii) ہوئی۔

$P = 2500 + 300(120) = 38500$

300 طالب علموں کے کل اخراجات 38500 روپے ہیں

مشق 18.7

1. تار میں کرنٹ اور پوٹینشل ڈفرنس میں تغیر راست اور مزاحمت میں تغیر معکوس ہے۔ اگر I=6amp جب V=220 volt اور R=5ohm ہے۔ I معلوم کریں جب V=180 volt اور R=8ohm ہے۔
2. روشنی کی شدت جو کہ فٹ کینڈلز میں ناپی جاتی ہے۔ روشنی کے منبع سے فاصلے کے مربع کے ساتھ تغیر معکوس ہے۔ فرض کریں کہ ایک اُنچے بلب کی شدت 3 میٹر کے فاصلے پر 0.08 فٹ کینڈلز ہے۔ 8 میٹر پر شدت کی سطح معلوم کریں۔
3. مستطیل بیم کی طاقت "S" جو کہ تغیر راست ہے چوڑائی "b" اور گہرائی "d" کے مربع کے ساتھ۔ اگر بیم 9 سینٹی میٹر چوڑی اور 12 سینٹی میٹر گہری سپورٹ 1000 پائونڈ کے ساتھ۔ معلوم کریں کہ 12 سینٹی میٹر چوڑی اور 9 سینٹی میٹر گہرائی والی بیم کتنے وزن کو سہارا دے گی۔
4. مزدوروں کی مزدوری "c" اور مزدوروں کی تعداد "n" اور اوسط دونوں کی تعداد "d" میں مشترکہ تغیر ہے اگر 100 مزدوروں کی 15 دنوں کی مزدوری 9000 روپے ہے تو 300 مزدوروں کی 20 دنوں کی مزدوری معلوم کریں۔
5. نئی کار کی خریداری پر سیل ٹیکس اور کار کی قیمت میں تغیر راست ہے۔ اگر ایک نئی کار 2000000 روپے خریدی جاتی ہے تو سیل ٹیکس 40000 روپے ہے۔ اگر نئی کار کی قیمت 280000 روپے ہو تو کتنا سیل ٹیکس لیا جائے گا۔

اعادہ مشق 18

1. مندرجہ ذیل میں درست جواب کا انتخاب کریں

(i) تناسب $p:q::r:s$ میں p کہلاتا ہے

(a) تیسرا تناسب (b) وسطین (c) چوتھا تناسب (d) پہلا تناسب

(ii) نسبت $l : m$ میں l ____ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iii) نسبت $u : v$ میں v ____ کہلاتا ہے۔

(a) مقدم (b) موخر (c) تعلق (d) ان میں کوئی نہیں

(iv) اگر a، b، c مسلسل تناسب میں ہیں تو b ____ تناسب a اور c کے درمیان کہلاتا ہے۔

(a) پہلا (b) وسطین (c) تیسرا (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) a^2 اور b^2 کے درمیان وسطین ____ ہے۔

(a) $\sqrt{ab}$ (b) ab (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-ab$

(vi) اگر $x+5:x+7=5:7$ تو x ____ برابر ہے۔

(a) 2 (b) -1 (c) 0 (d) 1

(vii) اگر 1، 9، x اور 45 تناسب میں ہیں تو $x =$ ____

(a) 27 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 5 (d) 405

(viii) اگر $p : q = r : 5$ تو $p : r = q : 5$ یہ ____ خاصیت کہلاتی ہے۔

(a) ترکیب نسبت (b) عکس نسبت
(c) تفصیل نسبت (d) ابدال نسبت

(ix) اگر $x : y = z : w$ تو ترتیب نسبت کے مطابق

(a) $\frac{x}{x+y}=\frac{z}{z+w}$ (b) $\frac{x}{x-y}=\frac{z}{z-w}$
(c) $\frac{x-y}{x+y}=\frac{z-w}{z+w}$ (d) $\frac{x-y}{y}=\frac{z-w}{w}$

(x) اگر $a : b = c : d$ تو پھر ابدال نسبت کے مطابق

(a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (b) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{c}$ (c) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (d) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(xi) 3,5,12 چوتھا متناسب ____ ہے

(a) 20 (b) 15 (c) 60 (d) 36

(xii) اگر $2x$، $3y$ اور $6z$ مسلسل تناسب میں ہے تو ____

(a) $y^2 = 12xy$ (b) $9y^2 = xz$ (c) $9y^2 = 12xz$ (d) $3y^2 = 4xz$

(xiii) اگر $\frac{x}{y}=\frac{w}{z}$ تو تفصیل نسبت کے مطابق ہے

(a) $\frac{x-y}{y}=\frac{w-z}{z}$ (b) $\frac{x+y}{y}=\frac{w+z}{z}$
(c) $\frac{x}{x+y}=\frac{w}{w+z}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xiv) قوت اور اسراع ____ ہیں

(a) تغیر راست (b) مشترکہ راست (c) تغیر معکوس (d) ان میں سے کوئی نہیں

(xv) اگر $a : 4 = 15 : 5$ تو $a =$ ____

(a) 20 (b) 15 (c) 12 (d) 10

2. نسبت معلوم کریں

(i) 100 میٹر اور 500 سنٹی میٹر (ii) 500 کلو گرام اور 300 گرام

3. مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں

(i) $9:x-10=x+13:12$ (ii) $5:x-3=x+11:3$

4. y اور x میں تغیر راست ہے اور $y = 25$ جب کہ $x = 75$ تو y معلوم کریں جبکہ $x = 144$

5. y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y = 100$ جبکہ $x = \frac{1}{2}$ تو y معلوم کریں جب $x = 4$

6. اگر $x : y = 3 : w$ تو ثابت کریں کہ $\frac{7x+5y}{7x-5y}=\frac{7z+5w}{7z+5w}$

7. مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی مدد سے حل کریں

$$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-7)(x-2)}=\frac{(x-6)(x-2)}{(x-1)(x-8)}$$

8. اگر x اور y میں تغیر راست اور z تغیر معکوس ہے۔ اگر $x = 30$ جب کہ $y = 15$ اور $z = 2$ ۔ x معلوم کریں اگر $y = 30$ جبکہ $z = 12$

9. سرکٹ میں کرنٹ اور مزاحمت (پیمائش اوہم ہیں) تغیر معکوس ہے اگر سرکٹ میں کرنٹ 40amp اور مزاحمت 10 ohms ہے تو کرنٹ معلوم کریں اگر اس کی مزاحمت 12 ohms ہے

خلاصہ:

- ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت کہلاتا ہے۔
- دو نسبتیں $a:b$ اور $c:d$ باہم برابر ہیں تو ہم لکھ سکتے ہیں $a:b::c:d$
- دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے۔
- اگر دو متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں باترتیب اضافہ (یا کمی) کا باعث بنے تو یہ تغیر راست کہلاتی ہیں۔
- اگر متغیرات اس طرح مربوط ہوں کہ ایک کی مقدار میں اضافہ (یا کمی) دوسری مقدار میں بالترتیب کمی (یا اضافہ) کا باعث بنے تو یہ تغیر معکوس کہلاتی ہیں۔
- تناسب سے متعلق مسئلے
  - (i) مسئلہ عکس نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $b:a=d:c$
  - (ii) مسئلہ ابدال نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a:c=b:d$
  - (iii) مسئلہ ترکیب نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a+b:b=c+d:d$ (b) $a:a+b=c:c+d$
  - (iv) مسئلہ تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو (a) $a-b:b=c-d:d$ (b) $a:a-b=c:c-d$
  - (v) مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت: اگر $a:b=c:d$ تو $a+b:a-b=c+d:c-d$
- اگر ایک متغیر ایک یا ایک سے زائد متغیرات میں تغیر راست یا تغیر معکوس ہو تو یہ مشترکہ تغیر کہلاتا ہے۔