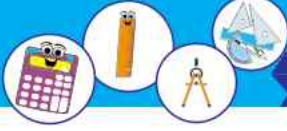


طلباء کے آزموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

- نسبت، تناسب اور تغیرات (راست اور معکوس) کی تعریف کر سکیں
- تیسرا، چوتھا، وسطی اور مسلسل تناسب معلوم کر سکیں۔
- عکس نسبت (Invertendo)، ابدال نسبت (Alternando)، ترکیب نسبت (Components)، تفصیل نسبت (Dividendo)، تفصیل و ترکیب نسبت، تناسب معلوم کرنے کے لیے مسئلہ کا اطلاق کر سکیں۔
- مشترکہ تغیرات کی تعریف کر سکیں
- مشترکہ تغیرات سے متعلق مسائل حل کر سکیں
- طریقہ استعمال کرتے ہوئے تناسب پر مبنی شرطیں مساوات ثابت کر سکیں۔
- تغیرات پر مبنی روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں



18.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (Ratio, Proportions and variations)

18.1.1 نسبت، تناسب اور تغیرات (راست و معکوس) کی تعریف کرنا

(a) نسبت (Ratio):

ایک ہی اکائی کی دو مقداروں کا موازنہ نسبت ہے۔ یہ ایک ہی قسم کی دو مقداروں کا باہمی تعلق ہے دو سرے الفاظ میں نسبت کا مطلب ہے۔ اگر a اور b ایک ہی قسم کی دو مقداریں ہیں اور b صفر نہیں ہے تو a اور b کی نسبت کو یوں لکھا جاتا ہے: $a:b$ یا $\frac{a}{b}$

مثلاً: اگر ایک جماعت میں 13 لڑکے اور 8 لڑکیاں ہیں تو لڑکے اور لڑکیوں کی تعداد کی نسبت کو یوں $13:8$ یا $\frac{13}{8}$ کسر میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

نوٹ:

(i) نسبت میں رقموں کی ترتیب اہم ہوتی ہے

(ii) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی ہے

(iii) نسبت $a:b$ میں پہلی رقم (First term) مقدم (Antecedent) اور دوسری رقم (Second term) مؤخر (Consequent) کہلاتی ہے

مثال 1: نسبت معلوم کریں:

(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام

(iv) 200 روپے اور 300 گرام

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر

(iii) 300 سیکنڈ اور 2 منٹ

حل:

(i) 400 میٹر اور 900 میٹر کی نسبت

$$400:900 = \frac{400}{900} = \frac{4}{9} = 4:9$$

400:900 کی مختصر ترین صورت 4:9 ہے

(ii) 700 گرام اور 2 کلو گرام کی نسبت

چونکہ 1 کلو گرام = 1000 گرام
اس لیے 2 کلو گرام = 2000 گرام

اب

$$700:2000 = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20} = 7:20$$

(iii) 30 سیکنڈ اور 2 منٹ

چونکہ 1 منٹ = 60 سیکنڈ

اس لیے 2 منٹ = 120 سیکنڈ

اب

$$30:120 = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 1:4$$

(iv) 200 روپے اور 300 گرام کی نسبت

چونکہ مقداریں ایک قسم کی نہیں ہیں لہذا 200 روپے اور 300 گرام کے درمیان نسبت معلوم نہیں کی جاسکتی ہے



مثال 2: نسبت $5a + 2b : 4a + 3b$ معلوم کریں اگر $a : b = 4 : 5$
حل: دیا گیا ہے کہ $a : b = 4 : 5$ یا $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$$5a + 2b : 4a + 3b = \frac{5a + 2b}{4a + 3b} \quad \text{اب}$$

$$\begin{aligned} \frac{5a + 2b}{4a + 3b} &= \frac{5(\frac{a}{b}) + 2(\frac{b}{b})}{4(\frac{a}{b}) + 3(\frac{b}{b})} \\ &= \frac{5(\frac{4}{5}) + 2}{4(\frac{4}{5}) + 3} = \frac{4 + 2}{\frac{16}{5} + 3} = \frac{6}{\frac{31}{5}} = \frac{30}{31} \quad \left(\because \frac{a}{b} = \frac{4}{5} \right) \end{aligned}$$

$$5a + 2b : 4a + 3b = 30 : 31 \quad \text{پس}$$

مثال 3: m کی قیمت معلوم کریں
حل: $3m + 5 : 4m + 3$ اور $2 : 3$ برابر ہیں

دی گئی شرط کے مطابق

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{3m + 5}{4m + 3} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3(3m + 5) &= 2(4m + 3) \\ \Rightarrow 9m + 15 &= 8m + 6 \\ \Rightarrow 9m - 8m &= 6 - 15 \\ \Rightarrow m &= -9 \end{aligned}$$

پس m کی مطلوبہ قیمت -9 ہے

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4 + a}{15 + a} &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 3(4 + a) &= 2(15 + a) \\ \Rightarrow 12 + 3a &= 30 + 2a \\ \Rightarrow 3a - 2a &= 30 - 12 \\ \Rightarrow a &= 18 \end{aligned}$$

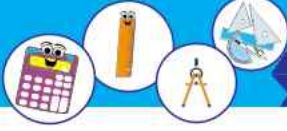
پس مطلوبہ عدد 18 ہے۔

(d) تناسب (Proportion):

دو نسبتوں کی برابری تناسب کہلاتی ہے جن کو دو نسبتوں کے برابر ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تو a, b, c, d اور تناسب میں ہیں اور ہم یوں لکھ سکتے ہیں: $a : b :: c : d$ جبکہ مقدریں a اور d طرفین جبکہ b اور c وسطین کہلاتی ہیں a, b, c, d اور تناسب یوں لکھا جاتا ہے

$$\begin{aligned} a : b :: c : d \\ a : b &= c : d \quad \text{یا} \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \quad \text{یا} \\ ad &= bc \quad \text{یا} \end{aligned}$$

نوٹ: طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب



مثال 5: x کی قیمت معلوم کریں اگر $40:60=50:x$
حل: دیا گیا ہے
 $40:60=50:x$
 چونکہ طرفین کا حاصل ضرب = وسطین کا حاصل ضرب
 $40x = 60 \times 50$
 یعنی
 $x = \frac{60 \times 50}{40} = 75$
 یا
 لہذا
 $x = 75$

مشق 18.1

1. مندرجہ ذیل کی نسبت معلوم کریں:
 - (i) 70 کلو گرام اور 25 کلو گرام
 - (ii) 60 سٹی میٹر سٹی میٹر اور 1 میٹر
 - (iii) 40 سیکنڈ اور 3 منٹ
 - (iv) 200 ملی لیٹر اور 2 لیٹر
 - (v) 135° اور 360°
 - (vi) 3.5 کلو گرام، 5 کلو گرام اور 200 گرام
2. ایک فیکٹری میں 120 کام کرنے والے ہیں جس میں 45 عورتیں ہیں اور باقی مرد ہیں۔ نسبت معلوم کریں:
 - (i) مرد اور عورتیں
 - (ii) عورتیں اور مرد
 - (iii) عورتیں اور کل کام کرنے والے
 - (iv) مرد اور کل کام کرنے والے
3. اگر $5(4x-2y)=3x-4y$ تو $x:y$ معلوم کریں
4. "a" کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $3a+4:2a+5$ اور $4:3$ برابر ہیں۔
5. نسبت 5:27 کی ہر رقم میں کونسا عدد جمع کیا جائے کہ یہ 1:3 کے برابر ہو جائے۔
6. اگر $a:b=5:8$ تو $3a+4b:5a+7b$ کی قیمت معلوم کریں
7. مندرجہ ذیل میں x معلوم کریں
 - (i) $2x+5:5::3x-2:7$
 - (ii) $\frac{4x-3}{5}:\frac{3}{4}::\frac{4x}{3}:\frac{7}{2}$
 - (iii) $\frac{x-3}{2}:\frac{5}{x-1}::\frac{x-1}{3}:\frac{4}{x+4}$
 - (iv) $(a^2-ab+b^2):x::\frac{a^3+b^3}{a-b}:(a+b)^2$
 - (v) $11-x:8-x::25-x:16-x$

(e) تغیر (Variation):

تغیر کی تعریف یوں کی جاتی ہے کہ ایک مقدار میں تبدیلی دوسری مقدار میں تبدیلی کا باعث ہے۔ تغیرات دو اقسام کے ہوتے ہیں

◀ تغیر راست (Direct Variation) ▶ تغیر معکوس (Inverse Variation)

تغیر راست (Direct variation):

اگر دو مقداروں A اور B کے درمیان ایسا تعلق ہے جس میں ایک مقدار A دی گئی نسبت سے بڑھے یا کم ہو تو دوسری مقدار A بھی اسی نسبت سے بڑھتی یا کم ہوتی ہے۔ اگر مقدار y اور مقدار x میں تغیر راست ہو تو اسے یوں لکھتے ہیں:

$$y = kx \text{ یا } y \propto x \text{ جبکہ } k \neq 0$$

علامت "∝" تناسب یا تغیر کی علامت کہلاتی ہے اور k ایک (Constant of variation) متقل کہلاتا ہے۔



مثال طور:

- (i) مربع کے ضلع کی لمبائی اور اس کے رقبے میں تغیر راست ہوتا ہے۔
(ii) سائیکل کی رفتار اور طے کردہ فاصلے میں تغیر راست ہوتا ہے

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر راست ہے تو معلوم کریں

- (a) x اور y کو منسلک کرنے والی مساوات (b) x اور y میں تعلق جبکہ $x=3$ اور $y=7$
(c) y کی قیمت جبکہ $x=24$ (d) x کی قیمت جبکہ $y=21$

حل: (a) جیسے کے y میں x تغیر راست ہے۔

لہذا
 $y \propto x$
 $y = kx$... (i)

- یعنی جبکہ k تغیر کا متقل ہے
(b) مساوات (i) میں $x=3$ اور $y=7$ رکھتے ہیں
 $7=3k$

$$\Rightarrow k = \frac{7}{3}$$

مساوات (i) میں x کی قیمت رکھتے ہیں، ہمیں ملا
 $y = \frac{7}{3}x$... (ii)

- (c) مساوات (ii) میں $x=24$ کی قیمت رکھتے ہیں، ہمیں ملا
 $y = \frac{7}{3}(24) = 56$
(d) مساوات (ii) میں $y=21$ کی قیمت رکھتے ہیں، ہمیں ملا

$$21 = \frac{7}{3}x \Rightarrow x = \frac{3 \times 21}{7} = 9$$

مثال 2: اگر y اور x کے جزا لربع میں تغیر راست ہے، جبکہ $x=16$ اور $y=10$
تو معلوم کریں جبکہ $x=36$

حل: y اور x کے جزا لربع میں تغیر راست ہے۔

یعنی
 $y \propto \sqrt{x}$
یا
 $y = k\sqrt{x}$... (i)

جبکہ k تغیر کا متقل ہے۔
مساوات (i) میں $x=16$ اور $y=10$ رکھتے ہیں ہمیں ملا

$$10 = k\sqrt{16}$$

$$\Rightarrow k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

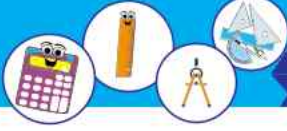
مساوات (i) میں $k = \frac{5}{2}$ رکھتے ہیں ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{x} \text{ ... (ii)}$$

مساوات (ii) میں $x=36$ رکھتے ہیں ہمیں ملا

$$y = \frac{5}{2}\sqrt{36}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2}(6) = 15$$



مثال 3: اگر V اور r کے معکب میں تغیر راست ہے اور $V = \frac{792}{7}$ جبکہ $r = 3$

V کی قیمت معلوم کریں جبکہ $r = 7$
حل: چونکہ V اور r کے معکب میں تغیر راست ہے

لہذا $V \propto r^3$
 (جبکہ k تغیر کا متقل ہے) $V = kr^3$ (i)
 مساوات (i) میں $r = 3$ اور $V = \frac{792}{7}$ رکھتے سے

$\frac{792}{7} = k(3)^3 \Rightarrow k = \frac{792}{7 \times 27} = \frac{88}{21}$ ہمیں ملا

$V = \frac{88}{21} r^3$... (ii) پس
 مساوات (ii) میں $r = 7$ رکھتے سے

$V = \frac{88}{21} (7)^3 = \frac{4312}{3}$ ہمیں ملا

تغیر معکوس (Inverse Variation):

اگر دو متغیرات (مقداروں) میں اس طرح تعلق ہے ایک مقدار میں اضافہ دوسری مقدار میں کمی کا باعث بنے اور اس کا الٹ تو مقداروں (متغیرات) کے دوسرے کے تغیر معکوس ہوتے ہیں۔ اگر y اور x میں تغیر معکوس ہو تو ہم یوں کہتے ہیں۔

جبکہ $k \neq 0$ (تغیر کا متقل) $y = \frac{k}{x}$ یا $y \propto \frac{1}{x}$
 $\Rightarrow yx = k$

مثال 1: اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے اور $y = 7$ جبکہ $x = 2$ تو y کی قیمت معلوم کریں اگر $x = 126$

حل: یہاں y اور x میں تغیر معکوس ہے
 یعنی $y \propto \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y = k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x}$
 $\Rightarrow k = xy$... (i)

مساوات (i) میں $y = 7$ اور $x = 2$ رکھتے سے

$k = (2)(7) = 14$ ہمیں ملا

$\Rightarrow xy = 14$... (ii)

مساوات (ii) میں $x = 126$ رکھتے سے

$(126)y = 14$ ہمیں ملا

$y = \frac{14}{126}$

$y = \frac{1}{9}$

مثال 2: اگر y اور x معکب میں تغیر معکوس ہے اور $y = 27$ اور $x = 8$ تو x معلوم کریں جبکہ $y = 36$

حل: یہاں y اور x میں تغیر معکوس ہے
 یعنی $y \propto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

یا $y = \frac{k}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y(\sqrt[3]{x}) = k$... (i)

مساوات (i) میں $x = 8$ اور $y = 27$ رکھتے سے

$k = (27)(\sqrt[3]{8}) = 54$ ہمیں ملا

اب مساوات (i) میں $k = 54$ رکھتے سے

$(y\sqrt[3]{x}) = 54$... (ii)

اب مساوات (ii) میں $y = 36$ رکھتے سے

$(36)(\sqrt[3]{x}) = 54$ ہمیں ملا

$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{27}{8}$



مشق 18.2

1. اگر y اور x میں تغیر راست ہے اور $y=10$ جبکہ $x=3$ تو معلوم کریں
(i) x کی صورت میں y جبکہ $x=6$ (ii) y جبکہ $x=15$ (iii) x جبکہ $y=15$
2. اگر $V \propto T$ اور $V=15$ جبکہ $T=24$ تو معلوم کریں
(i) T اور V منسلک کرنے والی مساوات (ii) $T=30$ جبکہ $V=10$ (iii) $T=30$ جبکہ $V=10$
3. اگر $u \propto \sqrt{v}$ اور $u=4$ جب $v=64$ تو u کی قیمت معلوم کریں جبکہ $v=216$ اور v کی قیمت جبکہ $u=5$
4. اگر F اور m^3 میں تغیر راست ہے جب $m=3$ اور $F=81$ تو F معلوم کریں جبکہ $m=5$
5. اگر y اور x میں تغیر معکوس ہے جب $y=10$ اور $x=3$ تو y معلوم کریں جبکہ $x=10$
6. گیس کا حجم V اور دباؤ P کے جذریع میں تغیر معکوس ہے اگر $V=12$ جبکہ $P=9$ معلوم کریں جبکہ $V=4$
7. اگر $F \propto \frac{1}{r^2}$ اور $F=8$ جب $r=2$ تو معلوم کریں
(i) F جبکہ $r=5$ (ii) r جبکہ $F=24$
8. x کے جذریع اور y کے جذریع میں تغیر معکوس ہے اگر $x=8$ جب $y=3$ معلوم کریں جب $y=\frac{3}{2}$
9. دو اجسام کے درمیان قوت F اور ان مراکز کے درمیان فاصلہ d کے مربیع میں تغیر معکوس ہے۔ اگر $F=2$ اور $d=3$ تو d معلوم کریں جب $F=72$
10. اگر y اور $(x-5)$ میں تغیر معکوس ہے جب کہ $y=6$ اور $x=8$ تو y معلوم کریں جب $x=10$

18.1(ii) تیسرا، چوتھا تناسب کے تناسب اور مسلسل تناسب میں وسطیٰ تناسب معلوم کرنا۔

ہم تناسب سے پہلے ہی سے واقف ہیں کہ اگر a, b, c, d تناسب میں ہیں تو $a:b::c:d$ لہذا a, b, c, d بالترتیب پہلا، دوسرا، تیسرا اور چوتھا تناسب کہلاتے ہیں

(a) تیسرا تناسب (Third Proportional):

مثال 1:

اگر 4، 7 اور 14 تناسب میں پہلا، دوسرا اور چوتھا تناسب ہیں تو اس کا تیسرا تناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا تناسب ہے تو

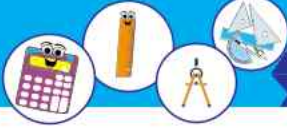
$$\begin{aligned} 4:7 &:: x:14 \\ 7x &= 56 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

مثال 2:

اگر $(a-b), (a^2+ab+b^2), (a^3-b^3)$ بالترتیب پہلا، دوسرا اور چوتھا تناسب ہیں تو تیسرا تناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں x تیسرا تناسب ہے تو

$$\begin{aligned} (a-b):(a^2+ab+b^2) &:: x:(a^3-b^3) \\ \Rightarrow (a^2+ab+b^2)x &= (a-b)(a^3-b^3) \\ \Rightarrow (a^2+ab+b^2)x &= (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \\ \Rightarrow x &= \frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} \\ \Rightarrow x &= (a-b)^2 \end{aligned}$$



(b) چوتھا تناسب (Fourth Proportional):

مثال 1: چوتھا تناسب معلوم کریں اگر پہلے تین متناسب $a^2 - ab + b^2$, $a - b$, $a^3 + b^3$ ہیں

حل: فرض کریں چوتھا تناسب x ہے تو

$$a^3 + b^3 : a - b :: (a^2 - ab + b^2) : x$$

$$x(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 - ab + b^2)$$

یعنی

$$\Rightarrow x = \frac{(a - b)(a^2 - ab + b^2)}{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a - b}{a + b}$$

مسلل تناسب (Continued Proportion) اور وسطی تناسب (Mean Proportional):

مقداریں a, b, c مسلسل تناسب کہلاتی ہیں اگر

$$a : b = b : c$$

$$a : b :: b : c$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

لہذا b وسطی تناسب کہلاتا ہے

مثال 1: $x^2 - y^2$ اور $\frac{x - y}{x + y}$ کا وسطی تناسب معلوم کریں

حل: فرض کریں z وسطی تناسب ہے تو

$$x^2 - y^2 : z :: z : \frac{x - y}{x + y}$$

$$z^2 = (x^2 - y^2) \frac{(x - y)}{x + y} = (x - y)^2$$

یعنی

$$\Rightarrow z = x - y$$

مثال 2: a کی قیمت معلوم کریں اگر $a - 3, 7$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

حل: چونکہ $a - 3, 7$ اور 28 مسلسل تناسب میں ہیں۔

$$7 : a - 3 :: a - 3 : 28$$

$$(a - 3)^2 = 7 \times 28$$

$$\Rightarrow (a - 3)^2 = 196$$

$$\Rightarrow a - 3 = 14$$

$$\Rightarrow a = 14 + 3$$

$$\Rightarrow a = 17$$

مشق 18.3

تیسرا متناسب معلوم کریں اگر پہلا، دوسرا اور چوتھا متناسب ہیں

1.

$$(i) \quad 6, 18, 54 \text{ اور } a^2 - b^2, a + b, a - b \quad (ii)$$

$$(iii) \quad (x + y)^2, x^3 + y^3, x + y \quad (iv) \quad \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2}, \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}, a + b$$



2. چوتھا تناسب معلوم کریں
- (i) 8, 4, 2 (ii) $a^3 + b^3, a^2 - b^2, a^2 - ab + b^2$
- (iii) $a^2 - 8a + 12, a - 2, 2a^3 - 12a^2$
- (iv) $(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2), a^3 + b^3, a^3 - b^3$

3. وسطیٰ تناسب معلوم کریں

- (i) 8, 18 (ii) $5ab^2, 20a^3b^2$
- (iii) $a^4 - b^4, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (iv) $a^3 - b^3, \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$

4. مندرجہ ذیل مسلسل تناسب میں x کی قیمت معلوم کریں

- (i) 45, x, 5 (ii) 16, x, 9
- (iii) 12, 3x - 6, 27 (iv) 7, x - 3, 112

18.2 تناسب سے متعلق مسئلے

18.2.1 عکس نسبت، ابدال نسبت، ترکیب نسبت، تفصیل نسبت کے مسئلوں کو حل کرنے کے لیے لاگو کریں۔

(i) مسئلہ عکس نسبت (Theorem of invertendo):

اگر $a:b = c:d$ تو $b:a = d:c$

اوپر دیا گیا بیان مسئلہ عکس نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b = c:d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

یعنی $b:a = d:c$ پس ثابت ہوا (دونوں اطراف معکوس لینے سے)

مثلاً: (i) اگر $2:3 = 4:6$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$3:2 = 6:4$$

(ii) اگر $4p:5q = 2r:5s$ تو مسئلہ عکس نسبت کی رو سے

$$5q:4p = 5s:2r$$

(ii) مسئلہ ابدال نسبت (Theorem of Alternando):

اگر $a:b = c:d$ تو $a:c = b:d$

یہاں مسئلہ ابدال نسبت کہلاتا ہے

ثبوت: چونکہ $a:b = c:d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

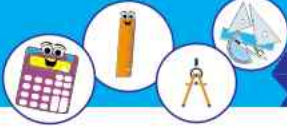
$$\Rightarrow ad = bc$$

دونوں اطراف cd سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$a:c = b:d$$

یعنی



مثال:

(i) اگر $2:5 = 6:15$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$2:6 = 5:15$$

(ii) اگر $4p-1:2-3q = 5+2r:2s+1$ تو مسئلہ ابدال نسبت کی رو سے

$$4p-1:5+2r = 2-3q:2s+1$$

(iii) مسئلہ ترکیب نسبت (Theorem of Componendo):

اگر $a:b = c:d$ تو مسئلہ ترکیب نسبت کے مطابق

(i) $a+b:b = c+d:d$

(ii) $a:a+b = c:c+d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ثبوت: (i) چونکہ

تو

دونوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$a+b:b = c+d:d$$

یا پس ثابت ہوا

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ثبوت: (ii) چونکہ

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

(مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)

تو

یادوںوں اطراف 1 جمع کرنے سے

$$\frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$$

$$\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c}$$

$$a:a+b = c:c+d$$

یا پس ثابت ہوا

مثال: اگر $p+2:q = r:s-3$ تو مسئلہ ترکیب نسبت (i) کی رو سے

$$p+2+q:q = r+s-3:s-3$$

اس ہی طرح، مسئلہ ترکیب نسبت (ii) کی رو سے

$$p+2:p+2+q = r:r+s-3$$

(iv) مسئلہ تفصیل نسبت (Theorem of Dividendo):

اگر $a:b = c:d$ تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے

(i) $a-b:b = c-d:d$

(ii) $a:a-b = c:c-d$



ثبوت: (ii) چونکہ $a:b=c:d$ لہذا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
 (مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)
 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
 دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے
 $\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1$
 $\Rightarrow \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$
 (مسئلہ عکس نسبت کی رو سے)
 $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$
 یا $a:b-a=c:d-c$ پس ثابت ہوا

ثبوت: (i) چونکہ $a:b=c:d$ یا $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
 دونوں اطراف 1 تفریق کرنے سے
 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$
 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا
 $a-b:b=c-d:d$ یا
 پس ثابت ہوا

مثال: اگر $m+5:n-3=4p+7:3q+2$ تو ثابت کریں کہ
 $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$
حل: چونکہ $m+5:n-3=4p+7:3q+2$

$\Rightarrow \frac{m+5}{n-3}=\frac{4p+7}{3q+2}$
 تو مسئلہ تفصیل نسبت کی رو سے
 $\frac{(m+5)-(n-3)}{n-3}=\frac{(4p+7)-(3q+2)}{3q+2}$

$\Rightarrow \frac{m-n+8}{n-3}=\frac{4p-3q+5}{3q+2}$
 یعنی $m-n+8:n-3=4p-3q+5:3q+2$ پس ثابت ہوا

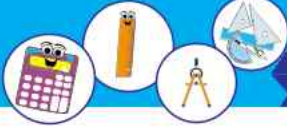
(v) ترکیب و تفصیل نسبت (Theorem of componendo and dividendo):
 اگر $a:b=c:d$ تو مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کے مطابق

(i) $a+b:a-b=c+d:c-d$
 (ii) $a-b:a+b=c-d:c+d$

مثال 1: اگر $m:n=p:q$ تو ثابت کریں کہ $3m-2n:3m+2n=3p-2q:3p+2q$
حل: چونکہ $m:n=p:q$

لہذا $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$

دونوں اطراف $\frac{3}{2}$ سے ضرب دینے سے



$$\frac{3m}{2n} = \frac{3p}{2q}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (ii) کی رو سے

$$\frac{3m-2n}{3m+2n} = \frac{3p-2q}{3p+2q}$$

$$3m-2n : 3m+2n = 3p-2q : 3p+2q \quad \text{یا}$$

پس ثابت ہوا۔

مثال 2: اگر $3p+4q : 3p-4q = 3r+4s : 3r-4s$ تو ثابت کریں کہ $p : q = r : s$

حل: چونکہ $3p+4q : 3p-4q = 3r+4s : 3r-4s$

بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت (i)

$$\therefore \frac{(3p+4q)+(3p-4q)}{(3p+4q)-(3p-4q)} = \frac{(3r+4s)+(3r-4s)}{(3r+4s)-(3r-4s)}$$

$$\frac{3p+4q+3p-4q}{3p+4q-3p+4q} = \frac{3r+4s+3r-4s}{3r+4s-3r+4s}$$

$$\frac{6p}{8q} = \frac{6r}{8s} \quad (\text{دونوں اطراف } \frac{6}{8} \text{ کا نئے سے})$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

$$p : q = r : s \quad \text{یا}$$

پس ثابت ہوا۔

مثال 3: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت x کی قیمت معلوم کریں

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}} = \frac{2}{5} \quad \text{اگر}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}} = \frac{2}{5} \quad \text{حل: ہمارے پاس:}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل نسبت کی رو سے

$$\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})+(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})}{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6})-(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6})} = \frac{2+5}{2-5}$$

$$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}-\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}} = \frac{7}{-3}$$

$$\frac{2\sqrt{x+6}}{-2\sqrt{x-6}} = \frac{7}{-3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-6}} = \frac{7}{3}$$

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$\frac{x+6}{x-6} = \frac{49}{9}$$

$$9x+54 = 49x-294$$

$$9x-49x = -294-54$$

$$-40x = -348$$

$$x = \frac{348}{40} = \frac{87}{10}$$



مثال 4: بذریعہ مسئلہ ترکیب و تفصیل مساوات $\frac{(x+3)^2 + (x-1)^2}{(x+3)^2 - (x-1)^2} = \frac{5}{4}$ کو حل کریں

حل: ہمارے پاس: $\frac{(x+3)^2 + (x-1)^2}{(x+3)^2 - (x-1)^2} = \frac{5}{4}$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{(x+3)^2 + (x-1)^2 + (x+3)^2 - (x-1)^2}{(x+3)^2 + (x-1)^2 - (x+3)^2 + (x-1)^2} = \frac{5+4}{5-4}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+3)^2}{2(x-1)^2} = \frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-1} = \pm 3$$

$$\begin{array}{ll} \frac{x+3}{x-1} = 3 & \text{یا} \quad \frac{x+3}{x-1} = -3 \\ x+3 = 3x-3 & x+3 = -3x+3 \\ -2x = -6 & 4x = 0 \\ x = 3 & x = 0 \end{array}$$

اس لیے حل سیٹ $\{0, 3\}$ ہے

مثال 5: ثابت کریں کہ اگر $a:b=c:d$ اگر $\frac{ac^2 - bd^2}{ac^2 + bd^2} : \frac{c^3 - d^3}{c^3 + d^3}$

حل:

$$\frac{ac^2 - bd^2}{ac^2 + bd^2} = \frac{c^3 - d^3}{c^3 + d^3} \quad \text{چونکہ}$$

مسئلہ ترکیب و تفصیل کی رو سے

$$\frac{ac^2 - bd^2 + ac^2 + bd^2}{ac^2 - bd^2 - ac^2 - bd^2} = \frac{c^3 - d^3 + c^3 + d^3}{c^3 - d^3 - c^3 - d^3}$$

$$\frac{2ac^2}{-2bd^2} = \frac{2c^3}{-2d^3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a:b=c:d$$

پس ثابت ہوا۔

$y \propto xz^2$
 $y = kxz^2$ (1)
 $x = 6, z = 3, y = 4$
 $4 = k(6)(3)^2 \Rightarrow k = \frac{4}{54} = \frac{2}{27}$

$\frac{z}{xy} = x \Leftrightarrow \frac{z}{y} \propto x$ (ii)
 $\frac{z}{yz} = x \Leftrightarrow \frac{z}{z} \propto x$ (i)

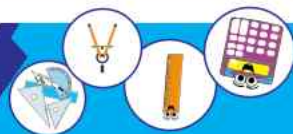
18.3: Joint Variation (متحدی تغیر)

3. مذخر ذی مساوات کو بذریعہ مستطیلات، تفصیلی نسبت علی کریم

2. $a:b = c:d$ کے ساتھ

$$\frac{w_3 - 2z_3}{w_3 + 2z_3} = \frac{3x_3 - 2y_3}{3x_3 + 2y_3} \quad (\text{VI})$$

۱. اگر $w : z = x : y$ و $x : y = z : w$ باشد،



18.5

۱۱۹۱

$$(II) \dots \frac{1}{\epsilon^{\Lambda} 81} = S$$
$$(I) \dots \frac{I \wedge n}{\varepsilon \Lambda} \chi = S \Leftarrow \frac{I \wedge n}{\varepsilon \Lambda} \propto S$$

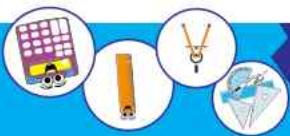
$$16 = \frac{k(4)^5}{\sqrt{9(24)}}$$

$$(I) \dots \frac{I \wedge n}{\varepsilon \Lambda} \chi = S \Leftarrow \frac{I \wedge n}{\varepsilon \Lambda} \propto S$$

$v = 5$ اور $t = 36, n = 25$ خستہ سرگرمی ہے اور s

$$y = \frac{27}{2}(-81)(5)^2 = 2(-3)(25) = -150$$
$$y = \frac{27}{2} x^2 \dots (ii)$$

سے رجحان (i) مساوی $k = \frac{27}{2}$



$$\text{L.H.S} = \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(bk+dk+fk)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{(b+d+f)^3}{(b+d+f)^3} = 1$$

$$\Rightarrow e = fk \Rightarrow c = dk \Rightarrow a = bk$$

$$\frac{e}{f} = k \quad \frac{c}{d} = k \quad \frac{a}{b} = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

بجائیں

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

$$\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^3} = \frac{ace}{bdf} = \frac{(b+d+f)^3}{(b+d+f)^3} = 1$$

پس ثابت ہوا

$$\frac{8a+5b}{8c-5d} = \frac{8a+5b}{8c-5d}$$

$$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{8c-5d}{8c-5d} = \frac{8dk-5d}{8dk-5d} = \frac{d(8k-5)}{d(8k-5)} = \frac{8k+5}{8k+5}$$

$$\text{L.H.S} = \frac{8a+5b}{8a-5b} = \frac{8bk+5b}{8bk-5b} = \frac{b(8k+5)}{b(8k-5)} = \frac{8k+5}{8k-5}$$

$$c = dk \quad a = bk$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

بجائیں

$$a : b = c : d$$

$$\frac{8a+5b}{8c-5d} = \frac{8a+5b}{8c-5d}$$

ان مساوات کے ذریعہ ہم تناسب سے ثابت کرتے ہیں

$$c = dk \quad a = bk \quad \dots (i) \quad \text{اور} \quad \dots (ii) \quad a = dk \quad c = bk$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = k \quad \frac{c}{d} = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

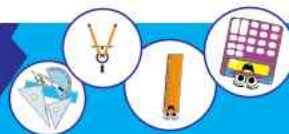
یہ ثابت ہوا کہ $a : b = c : d$

مثال 18.4 (i) - کچھ مساوات ثابت کریں:

مثبت a, b, c, d کے لیے $a : b = c : d$ ثابت کریں۔

مثبت a, b, c, d کے لیے $a : b = c : d$ ثابت کریں۔

مثبت a, b, c, d کے لیے $a : b = c : d$ ثابت کریں۔



$$\frac{f}{e^2} + \frac{p}{e^2} + \frac{q}{a^2} = \frac{qf}{ae} + \frac{fp}{ce} + \frac{pq}{ca} \quad (\text{iii})$$

$$\frac{q}{a^4} = \frac{f^2 - f^2 q + q^2}{f^4 - e^2 a^2 + q^2 a^2} \quad (\text{i})$$

$$\frac{s+r}{s} : \frac{r}{s-r} = \frac{b+d}{b} : \frac{d}{b-d} \quad (\text{v})$$

$$\frac{s+r}{r} : (s+r) = \frac{b+d}{d} : (b+d) \quad (\text{iii})$$

$$\frac{8r-3s}{8r+3s} = \frac{b^2-d^2}{b^2+d^2} \quad (\text{i})$$

$$\frac{b}{d} = \sqrt[3]{\frac{b^3+s^3}{d^3+r^3}} \quad (\text{ii})$$

$$\frac{f+p+q}{e+a} = \frac{af^2+pe^2+qab}{f^2b+e^2d+q^2a} \quad (\text{ii})$$

$$2. \text{ } f : f :: e : d :: b : a :: c : p :: q : f$$

$$(iv) \quad d : d :: s : s :: b : b :: r : r :: q : q :: s : s$$

$$1. \text{ } s : r :: d : b :: p : q :: f : f$$

18.6 مشق

پہلے

$$\therefore (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$= k^2(b^2+d^2+f^2)$$

$$= [k(b^2+d^2+f^2)]^2$$

$$= [k^2b^2+k^2d^2+k^2f^2]$$

$$= (b^2k^2+d^2k^2+f^2k^2)$$

$$\text{R.H.S} = (ab+cd+ef)^2$$

$$\Rightarrow e = f, k = d, a = b, c = k$$

$$\frac{a}{e} = \frac{p}{c} = \frac{b}{f} = k$$

$$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

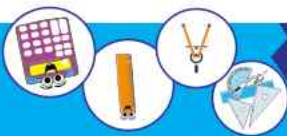
3. مثال

پہلے

$$\therefore \frac{(a+c+e)^3}{ace} = \frac{(b+d+f)^3}{bdf}$$

$$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{bdf}{ace} = \frac{bdf}{(bk)(dk)(fk)} = \frac{bdf}{k^3 bdf} = \frac{1}{k^3}$$



1. میرزا حسن علی خان

18 مئی ۱۹۶۵ء

18.7 
$$P = 2500 + 300(120) = 38500$$

یہ سب کچھ ہے

$$xu = \emptyset$$

(۱-۲) (۱-۲) (۱-۲)

$x \propto \partial$

[illegible]

-

(A) $p : \textcircled{\cdot} = q : v \quad \text{و} \quad p - \textcircled{\cdot} : p + \textcircled{\cdot} = q - v : q + v$
 (AI) $p : \textcircled{\cdot} = q : v \quad \text{و} \quad (v) p : p - \textcircled{\cdot} = q : q - v \quad (q) p - \textcircled{\cdot} : \textcircled{\cdot} = q - v : v$
 (III) $p : \textcircled{\cdot} = q : v \quad \text{و} \quad (v) p : p + \textcircled{\cdot} = q : q + v \quad (q) p + \textcircled{\cdot} : \textcircled{\cdot} = q + v : v$
 (II) $p : \textcircled{\cdot} = q : v \quad \text{و} \quad p : q = \textcircled{\cdot} : v$
 (I) $p : \textcircled{\cdot} = q : v \quad \text{و} \quad \textcircled{\cdot} : p = v : q$

॥१॥

2. **تکرار معنی**

