30 یونٹ نمبر

تکونیات کا تعارف

PYTHAGORAS THEOREM

طلباء کے آموزشی حاصلات

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سکسا جیسمل (Senagesined System) میں زاویے کی پیائش کر سکیں (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ)
- زاویے کو "D°M' S" سے کسر اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں اور کسر اعشاریہ سے "D°M' S" تبدیل کر سکیں۔
- ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیائش) اور ریڈین اور ڈگری پیائش کے درمیان تعلق کو ثابت کر سکیں۔
- $l = r\Theta$ ثابت کر سکیں۔ جبکہ r دائرے کا رداس۔ l دائروی قوس کی لمبائی اور Θ مرکزی زاویہ جس کی پیائش ریڈین میں ہو۔
- قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}l\,\theta$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کر سکیں۔

- تعریف اور پہچان کر سکیں۔
  - عمومی زاویہ (ہم بازو زاویے)
  - زاویے کی معیاری صورت
- ربعات (Quadrants) اور ابعی زاویوں (Auadrental Angle) کی پہچان کر سکیں۔
- ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں 30°، 45° اور 60° کی قیمتوں کو دہرا سکیں۔
- مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامات کی پہچان کر سکیں۔
- اگر ایک تکونیاتی نسبت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کر سکیں۔
- تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities) کو ثابت کر سکیں اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط (Relationship) کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول معلوم کر سکیں۔
- زاویہ صعود اور زاویہ نزول پر مشتمل روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

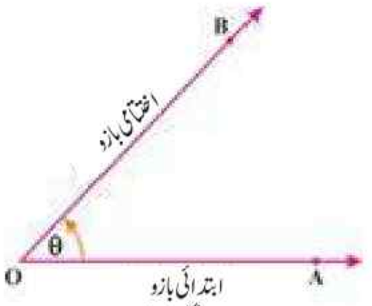
تعارف:

لفظ Trigonometry یونانی لفظ سے بنا ہے Tri (تین)، gono (زاویہ) اور metron (پیمائش) ہے۔ تکونیاتی Trigonometry کا مطلب مثلثوں کی پیمائش ہے۔ ریاضی کی اس شاخ کو یونانیوں نے 330 قبل مسیح میں متعارف کیا تھا۔ اس کا تعلق مثلثوں کے حل سے ہے اس کا وسیع اطلاق طبعیات، نیویگیشن، فلکیات، سرویئنگ وغیرہ میں ہوتا ہے۔

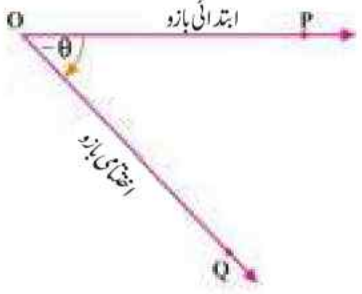
ایک زاویے کی پیمائش (Measurement of an Angle):

زاویہ دو شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جن کا ایک مشترکہ نقطہ راس کہلاتا ہے۔ یہ شعاع کو ابتدائی بازو اور دوسری شعاع کو اختتامی بازو کہلاتی ہے۔

زاویہ کی پیمائش ابتدائی بازو سے اختتامی بازو کی طرف گھماؤ کی سمت پر منحصر ہوتا ہے۔ گھڑی کی مخالف سمت میں پیمائش کیے گئے زاویے کو مثبت زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ شکل (a) میں دکھایا گیا ہے اور گھڑی کی سمت میں پیمائش کیے گئے زاویے کو منفی زاویہ تصور کیا جاتا ہے جیسا کہ (b) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل(a)



شکل (b)

ایک زاویہ معیادی صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا ابتدائی طرف مثبت x-محور (x-axis) پر ہو اور اس کا راس مرکز (origin) پر ہو۔

30.1 (i) زاویے کی سیکا جیمسیمل نظام میں پیمائش (ڈگری، منٹ اور سیکنڈ):

اگر ابتدائی شعاع $\overrightarrow{OA}$ گھڑی کی مخالف سمت میں ایک چکر مکمل کرتی ہے تو 360 ڈگری یا 360° کا زاویہ بناتی ہے یعنی دائرے کا محیط کو برابر قوسین میں تقسیم کیا جائے۔ دائرے مرکز پر اس طرح کی ایک قوس سے ایک ڈگری کا زاویہ بنتا ہے اور 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہر ڈگری کو 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ 1منٹ کہلاتا ہے یوں $1'$ ظاہر کیا جاتا ہے ہر منٹ 60 برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اور ہر حصہ 1 سیکنڈ کہلاتا ہے اور یوں $1''$ ظاہر کیا جاتا ہے۔
پس ایک منٹ 60 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے اور 1 سیکنڈ 360 واں حصہ ایک ڈگری کا ہوتا ہے۔ اس نظام جس میں زاویے کی پیمائش ڈگری، منٹ اور سیکنڈ میں کی جاتی ہے سیکا جیمسیمل نظام کہلاتا ہے۔ ایک مکمل چکر کا 360 واں حصہ ایک ڈگری ہوتا ہے اور یہ یوں $\frac{1}{360}$ ظاہر کیا جاتا ہے اسے مزید یوں تقسیم کیا جاتا ہے۔

$$1^\circ = 60 \text{ منٹ} = 60'$$
$$1' = 60 \text{ سیکنڈ} = 60''$$

مثلاً 30 ڈگری، 20 منٹ اور 10 سیکنڈ کو علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے: "10 '20 °30

30.1 (ii) زاویے کو کسر اعشاریہ (دو درجہ اعشاریہ تک) میں کسر اعشاریہ سے میں تبدیل کرنا:

اس سیکشن میں ہم منٹ اور سیکنڈ کو ڈگری میں تبدیل کرتے ہیں منٹ کو 60 سے اور سیکنڈ کو 3600 سے تقسیم کر کے۔ مختصر کرنے کے بعد ہمیں مطلوبہ شکل حاصل ہوتا ہے۔

مثال 1:

"10 '30 °30 کو ڈگری میں تبدیل کریں اور کسر اعشاریہ کی شکل میں لکھیں۔

حل: چونکہ

$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

اور

$$10'' = \left(\frac{10}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$\therefore \quad 30^\circ 30' 10'' = \left(30 + \frac{1}{2} + \frac{1}{360}\right)^\circ$$
$$= [30 + 0.5 + 0.003]^\circ$$
$$= 30.503^\circ$$
$$= 30.50^\circ \quad \text{(دو درجہ اعشاریہ تک)}$$

مثال 2:

12.51° کو $D^\circ M' S''$ شکل میں تبدیل کریں۔

حل:

$$12.51^\circ = 12^\circ + (0.51)^\circ$$
$$= 12^\circ + (0.51 \times 60)' \qquad (1^\circ = 60')$$
$$= 12^\circ + (30.6)'$$
$$= 12^\circ + 30' + (0.6)'$$
$$= 12^\circ 30' + (0.6 \times 60)'' \qquad (1' = 60'')$$
$$= 12^\circ 30' 36''$$

30.1 (iii) ریڈین کی تعریف (دائروی نظام میں ایک زاویے کی پیمائش) اور ریڈین اور ڈگری پیمائش کے درمیان تعلق ثابت کرنا۔

زاویے کی پیمائش کا ایک اور اکائی ریڈین ہے جو کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کے رداس کی نسبت کے برابر ہے

یعنی $\theta = \frac{l}{r}$ جبکہ θ ریڈین میں مرکزی زاویہ ہے اور l قوس کی لمبائی اور r دائرہ کا رداس ہے

نظام جس میں زاویے کی پیائش ریڈین میں کی جاتی ہی دائروی نظام کہلاتا ہے پس زاویے کی پیائش کو دائروی نظام میں 1 ریڈین کہا جاتا ہے اگر یہ قوس سے بنا ہے جو دائرے کے رداس کے برابر ہوتی ہے۔

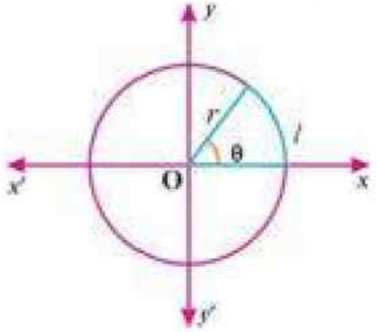


Fig: 30.1

ہمارے پاس $\theta = \frac{l}{r}$,

جبکہ $l = r$

تو $\theta = \frac{l}{l}$

$\boxed{\theta = 1 \text{ ریڈین}}$

اس لیے ایک مکمل چکر میں قوس کی لمبائی دائرے کا محیط ہوتی ہے

یعنی $l = 2\pi r$

اب،

$$\theta = \frac{l}{r}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{r}$$

$\boxed{\theta = 2\pi \text{ ریڈین}}$

پس ایک مکمل چکر میں زاویے کے پیائش 2π ریڈین ہے

ڈگری اور یڈین میں تعلق

ہم جانتے ہیں کہ ایک مکمل چکر میں زاویے کی پیائش ڈگری میں $360°$ ہوتی ہے اور ریڈین میں 2π ہوتی ہے۔

اس طرح

$$360° = 2\pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 180° = \pi \text{ ریڈین}$$

$$\Rightarrow \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ ریڈین} \approx 0.01745 \text{ ریڈین}$$

$$\text{یا} \quad 1 \text{ ریڈین} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.3°$$

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	ڈگری
2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	ریڈین

مثال 1

مندرجہ ذیل کو ریڈین پیائش میں تبدیل کریں۔

(a) $120°$ (b) $10° 30'$ (c) $24° 32' 30''$

حل (a):

ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\therefore \quad 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

$\Rightarrow \quad 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ ریڈین

حل (b): ہم جانتے ہیں

$\because \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

$\therefore \quad 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$

اب $\quad 10^\circ 30' = \left(10 + \frac{30}{60}\right)^\circ = \left(10 + \frac{1}{2}\right)^\circ = \left(\frac{21}{2}\right)^\circ$

$\therefore \quad = \frac{21}{2} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین $\quad$ ($\because 1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ریڈین)

$\Rightarrow \quad = \frac{7\pi}{120}$ ریڈین

حل (c): $24^\circ 32' 30''$

$= 24^\circ + \left(\frac{32}{60}\right)^\circ + \left(\frac{30}{3600}\right)^\circ \qquad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ and $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$

$= \left(24 + \frac{32}{60} + \frac{30}{3600}\right)^\circ = \left(24 + \frac{8}{15} + \frac{1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{24 \times 120 + 64 + 1}{120}\right)^\circ$

$= \left(\frac{2945}{120}\right)^\circ \qquad$ ($\because 1^\circ \cong \frac{\pi}{180}$ ریڈین)

$\left(\frac{2945}{120}\right)^\circ = \frac{2945}{120} \times \frac{\pi}{180}$ ریڈین

اب $\quad \therefore \quad = \frac{589}{4320}\pi$ ریڈین

تو $\quad 24^\circ 32' 30'' = \frac{589}{4320}\pi$ ریڈین

مشق 30.1

1. مندرجہ ذیل ڈگری میں تبدیل کریں اور اعشاریہ میں لکھیں

(i) $32^\circ\ 15'$ (ii) $10^\circ\ 30'$ (iii) $8^\circ\ 15'\ 30''$

(iv) $45^\circ\ 21'\ 36''$ (v) $25^\circ\ 30'$ (vi) $18^\circ\ 6'\ 21''$

2. مندرجہ ذیل زاویوں کو $D^\circ M' S''$ میں تبدیل کریں

(i) 32.25° (ii) 47.36° (iii) 57.325°

(iv) 67.58° (v) 22.5° (vi) 225.60°

3. مندرجہ ذیل زاویوں کو ڈگری میں ظاہر کریں

(i) $\frac{\pi}{4}$ ریڈین (ii) $\frac{\pi}{3}$ ریڈین (iii) $-\frac{3\pi}{4}$ ریڈین

(iv) 3 ریڈین (v) $\frac{3}{\pi}$ ریڈین (vi) 4.5 ریڈین

4. مندرجہ ذیل زاویوں کو ریڈین میں تبدیل کریں

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60°

(iv) $\left(22\frac{1}{2}\right)^\circ$ (v) -225 (vi) $60^\circ\ 35'\ 48''$

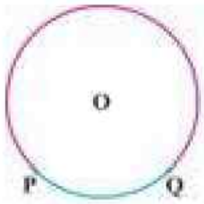
30.2 دائرے کا قطاع (Sector of circle):

تعریف:

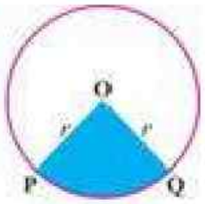
(i) دائرے کے محیط کا ایک قوس (arc) کہلاتا ہے۔

(ii) دائرے کا ایک حصہ جو دو رداسی قطعات اور ایک قوس سے گھیرا ہوا ہو دائرے کا قطاع کہلاتا ہے

مندرجہ ذیل اشکال اوپر دی گئی تعریفوں کو سمجھنے میں مدد کرتی ہیں۔



شکل 30.2(i)



شکل 30.2(ii)

شکل 30.2(i) میں PQ ایک قوس ہے اور شکل 30.2(ii) میں POQ ایک قطاع (Sector) ہے۔

30.2(i) $l = r\theta$ ثابت کرنا۔ جبکہ r دائرے کا رداس، l دائروی قوس کی لمبائی اور θ مرکزی زاویہ جس کی پیمائش ریڈین میں ہو

r رداس کی دائرے میں، l قوس کی لمبائی θ مرکزی زاویے کے درمیان راست تناسب ہے۔ (شکل 30.3 میں دکھایا گیا ہے)

یعنی $l \propto \theta$

$\Rightarrow \quad l = c\theta \qquad \ldots(i)$

ایک مکمل چکر کے لیے

$$l = 2\pi r$$

اور

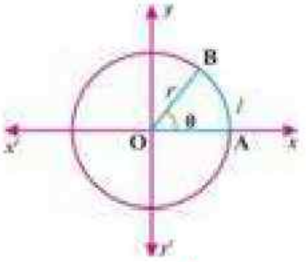
$$\theta = 2\pi$$

مساوات (i) سے ہمیں ملا

$$2\pi r = c(2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad c = r$$

لہٰذا مساوات (i) ہوتی ہے $l = r\theta$



شکل 30.3

نوٹ: (i) l اور r کی پیمائش ایک جیسی اکائی میں کی جاتی ہے

(ii) θ کی پیمائش ریڈین میں کی جاتی ہے۔

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کی ایک قوس کی لمبائی معلوم کریں جو $\frac{2\pi}{5}$ ریڈین کا دائرہ بناتی ہے۔

حل:

$l = ?$ اور $r = 5\text{cm}, \theta = \frac{2\pi}{5}$ ریڈین

چونکہ

$$l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = 5 \times \frac{2\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \quad l = 2\pi \cong 2\left(\frac{22}{7}\right) \approx 6.28\text{cm.}$$

مثال 2:

ایک لڑکا بائیسکل کے 10 چکروں میں کتنی دور تک سفر کرے گا اگر سائیکل کے ہر پہیہ کا قطر 56 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

ہم جانتے ہیں کہ

ایک چکر $= 2\pi$ ریڈین

$\therefore$ 10 چکر $= 20\pi$ ریڈین

یعنی $\theta = 20\pi$ ریڈین

پہیے کا قطر $d = 56$ سینٹی میٹر

$\therefore \quad r = \frac{d}{2} = \frac{56}{2}$ سینٹی میٹر $= \frac{56}{2 \times 100}$ میٹر $\qquad \because$ (1 میٹر = 100 سینٹی میٹر)

$$l = r\theta$$

$$\therefore \quad l = \frac{56}{2 \times 100} \times 20\pi$$

$$\Rightarrow \quad l \approx \frac{56}{2 \times 100} \times 20 \times \frac{22}{7} \qquad (\because \pi \cong \frac{22}{7})$$

$$\Rightarrow \quad l \approx 17.6\text{m.}$$

پس 10 چکروں میں 17.6 میٹر سفر کرے گا۔

مثال 3:
r کی قیمت معلوم کریں جبکہ $l = 4$ سینٹی میٹر اور $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

حل:

$l = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

اور $r = ?$

$l = r\theta$

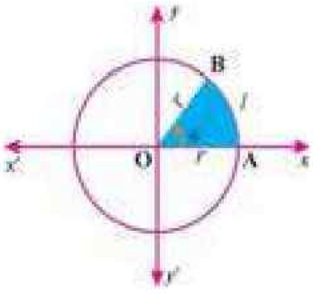
$\therefore \quad r = \frac{l}{\theta}$

$\Rightarrow \quad r = \left(4 \div \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{4}{1} = 16$

30.2(ii) قطاع دائرے کا رقبہ $\frac{1}{2}lr$ یا $\frac{1}{2}r^2\theta$ ثابت کرنا

ثبوت:

غور کریں: رداس r کے دائرے کا مرکز O، $\overline{AB}$ ہے۔ ایک قوس جو مرکز پر θ ریڈین کا زاویہ بناتی ہے جیسا کہ شکل 30.4 میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 30.4

ہم جانتے ہیں کہ

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

ایک چکر کا زاویہ $= 2\pi$ ریڈین

قطاع دائرے کا زاویہ $= \theta$ ریڈین

تو ایلیمینٹری جیومیٹری کی رو سے بذریعہ قانونِ تناسب ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\text{دائرے کا رقبہ}} = \frac{\text{قطاع کا زاویہ}}{\text{دائرے کا زاویہ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{قطاع AOB کا رقبہ}}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{\pi r^2 \times \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$\text{یا} \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} \quad \frac{1}{2}r\theta \times r$$

$$\Rightarrow \quad \text{قطاع AOB کا رقبہ} = \frac{1}{2}rl \qquad (\because r\theta = l)$$

پس ثابت ہوا

مثال 1: 5 سینٹی میٹر رداس کے دائرے قطاع کا رقبہ معلوم کریں جبکہ مرکزی زاویہ 60° ہے۔

حل:

$r = 5$ سینٹی میٹر

$\theta = 60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3}$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}(5)^2 \times \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $\approx \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{22}{7 \times 3}$ $\quad \pi \approx \frac{22}{7}$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 13.09$ مربع سینٹی میٹر

مثال 2: قطاع کا رقبہ معلوم کریں جس کا رداس 4 سینٹی میٹر اور مرکزی زاویہ 12 ریڈین ہے۔

حل:

$r = 4$ سینٹی میٹر

$\theta = 12$ ریڈین

اور قطاع کا رقبہ $= ?$

$\because$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}r^2\theta$

$\therefore$ قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}(4)^2 \times 12$

$\Rightarrow$ قطاع کا رقبہ $= 16 \times 6 = 96$ مربع سینٹی میٹر

مشق 30.2

1. θ معلوم کریں اگر

(i) $r = 5$ سینٹی میٹر اور $l = 20$ سینٹی میٹر

(ii) $r = 2$ سینٹی میٹر اور $l = 30.2$ سینٹی میٹر

(iii) $r = 2.87$ سینٹی میٹر اور $l = 6$ سینٹی میٹر

(iv) $r = 2.5$ سینٹی میٹر اور $l = 4.5$ سینٹی میٹر

2. l معلوم کریں اگر

(i) $\theta = 2.1$ ریڈین اور $r = 1.01$ سینٹی میٹر

(ii) $\theta = 2$ ریڈین اور $r = 5.1$ سینٹی میٹر

(iii) $\theta = 30^\circ$ اور $r = 6$ سینٹی میٹر

(iv) $\theta = 60^\circ 30'$ اور $r = 15$ سینٹی میٹر

3. r معلوم کریں اگر

(i) $l = 2$ میٹر اور $\theta = 60^\circ$

(ii) $l = \frac{7}{4}$ میٹر اور $\theta = 3.5$ ریڈین

(iii) $l = 4$ سینٹی میٹر اور $\theta = \frac{1}{4}$ ریڈین

(iv) $l = 15.4$ سینٹی میٹر اور $\theta = 180^\circ$

4. اکائی دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کریں اگر متقابل مرکزی زاویے کی پیمائش

(i) 30° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 90°

5. ایک قوس کے متقابل مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{6}$ ریڈین ہے۔ دائرے کا رداس 5 سینٹی میٹر تو معلوم کریں۔

(i) قوس کی لمبائی (ii) دائروی قطاع کا رقبہ

6. 10 سینٹی میٹر رداس کے ایک دائرے پر ایک نقطہ گردش کر رہا ہے۔ اگر یہ 3.5 چکر مکمل کرتا ہے۔ معلوم کریں کہ نقطہ نے کتنا فاصلہ طے کیا ہے۔

7. 4 سینٹی میٹر رداس کے دائرے کے قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔ جس کا مرکزی زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہے۔

8. اگر 21 سینٹی میٹر فلائی وہیل کے رم پر نقطہ 5040 میٹر کا سفر ایک منٹ میں طے کرتا ہے تو ایک سیکنڈ میں وہیل کتنا ریڈین گھومتا ہے۔

9.

10. 12 سینٹی میٹر رداس کے دائرے میں ایک قوس کا متقابل مرکزی زاویہ 84° ہے۔ اس قوس کی لمبائی اور قطاع کا رقبہ معلوم کریں۔

30.3 تکونیاتی نسبتیں (Trigonometric Ration)

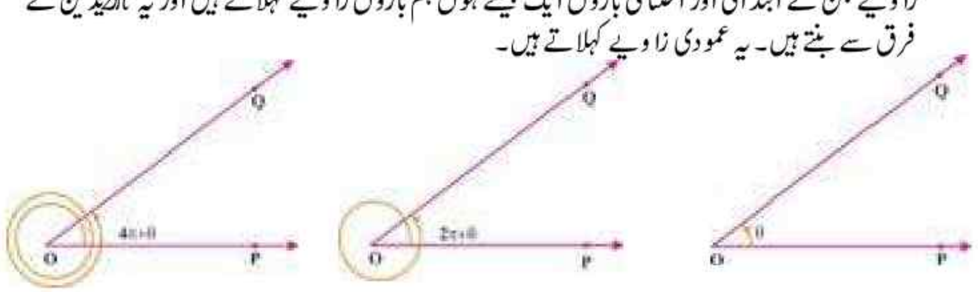
30.3(i) تعریف اور پہچان کرنا:

(a) عمودی زاویہ (ہم بازو زاویے)

(b) زاویے کی معیاری صورت

30.3.1(a) عمودی زاویے (ہم بازو زاویے) General Angle (Co-terminal Angles)

زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازوں ایک جیسے ہوں ہم بازوں زاویے کہلاتے ہیں اور یہ 2π ریڈین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمودی زاویے کہلاتے ہیں۔



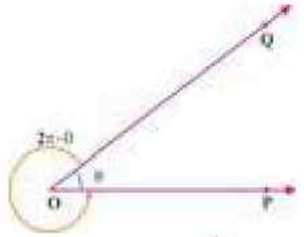
$m\angle POQ = \theta$ ریڈین، جبکہ $0 \le \theta < 2\pi$

(i) θ ریڈین ، (0 چکر)

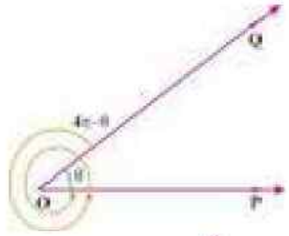
(ii) $(2\pi+\theta)$ ، (ایک چکر کے بعد)

(iii) $(4\pi+\theta)$ ، (دو چکروں کے بعد)

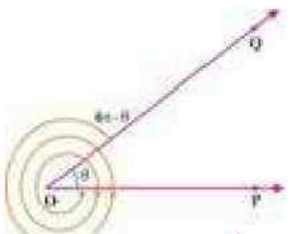
پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ اور ہم بازوں زاویے شکل 30.5 میں دکھائے گئے ہیں۔ تاہم اگر گردش گھڑی کی سمت میں ہے جیسا کہ نیچے شکل میں دکھایا گیا ہے



شکل 30.6 (i)



شکل 30.6 (ii)



شکل 30.6 (iii)

(i) $2\pi-\theta$ ریڈین (کوئی چکر نہیں)

(ii) $4\pi-\theta$ ریڈین (ایک چکر کے بعد)

(iii) $6\pi-\theta$ ریڈین (دو چکروں کے بعد)

ریڈین $m\angle POQ=\theta$، جبکہ $0\leq\theta<2\pi$

پس θ، $2\pi+\theta$ اور $4\pi+\theta$ اور ہم بازوں زاویے شکل 30.6 میں دکھائے گئے ہیں۔

مثال:

مندرجہ ذیل کونسے زاویے $120°$ کے ساتھ ہم بازو زاویہ ہیں

$$-240°, 480°, \frac{14\pi}{3} \text{ اور } -\frac{14\pi}{3}$$

حل:

ہاں $-240°$، $120°$ کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 120°-(-240°)=120°+240°=360°$

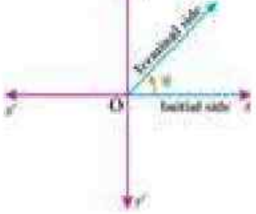
ہاں $480°$، $120°$ کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad 480°-120°=360°$

ہاں $\frac{14\pi}{3}$، $120°$ کا ہم بازو زاویہ ہے $\quad \frac{14\pi}{3}-120°=\frac{14\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=\frac{12\pi}{3}=4\pi$

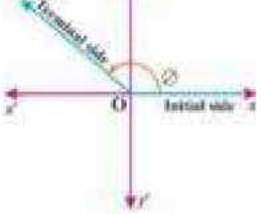
یہ 2π کا عاد نہیں ہے $\quad 120°-\left(\frac{14\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{14\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$

لہذا $\frac{14\pi}{3}$، $120°$ کا ہم بازو زاویہ نہیں ہے

30.3(b)(i) ایک زاویہ معیاری صورت (Stanton Position) مین کہلاتا ہے اگر اس کا راس محور پر ہو اور ابتدائی بازو مثبت x- محور پر جیسا کہ شکل 30.7 میں دکھایا گیا ہے۔

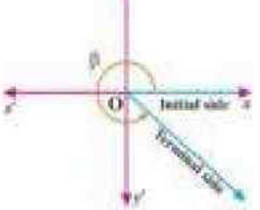


شکل 30.7 (i)



شکل 30.7 (ii)

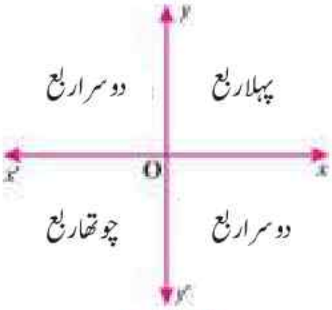
شکل 30.7 (iii)



شکل 30.7 (iv)

30.3(ii) ربعات (Quadrants) اور ربعی زاویوں (Quadrants Angles) کی پہچان کرنا۔

مستطیلی عدد نظام میں دو محور ایک مستوی کو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrants) کہلاتا ہے۔
جس سے چار ربعات بنتے ہیں جیسا کہ شکل 30.5 میں دکھایا گیا ہے۔



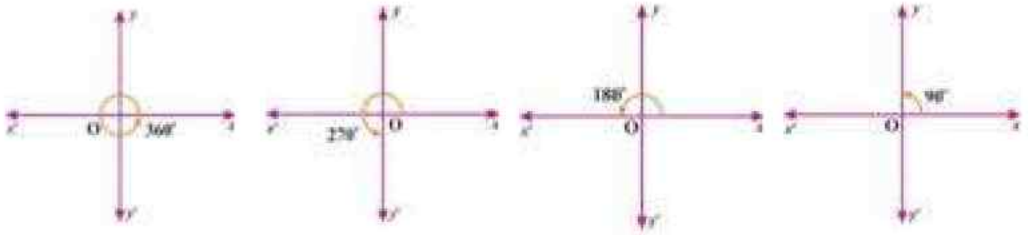
شکل 30.8

پہلے ربع میں زاویے 0° اور 90° کے درمیان
یعنی $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
دوسرے ربع میں زاویے 90° اور 180° کے درمیان
یعنی $90^\circ < \theta < 180^\circ$
تیسرے ربع میں زاویے 180° اور 270° کے درمیان
یعنی $180^\circ < \theta < 270^\circ$
چوتھے ربع میں زاویے 270° اور 360° کے درمیان
یعنی $270^\circ < \theta < 360^\circ$

ربع میں زاویہ معیاری صورت میں ہوتا ہے اگر اس کا اختتامی بازو ربع میں ہوتا ہے۔

30.3(ii)(b) ربعی زاویے (Quadrants Angles)

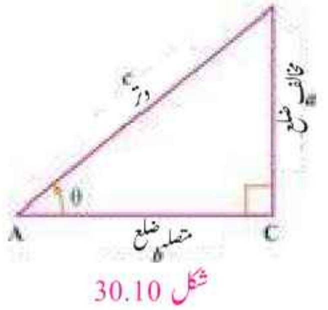
اگر معیاری زاویے کے اختتامی بازو x- محور یا y- محور پر واقع ہو تو یہ ربعی زاویہ کہلاتا ہے۔ مثلاً 90°، 180°، 270° اور 360° جو کہ مندرجہ ذیل اشکال میں دکھائے گئے ہیں۔



شکل 30.9 (iv) شکل 30.9 (iii) شکل 30.9 (ii) شکل 30.9 (i)

30.3(iii) ایک اکائی دائرے کی مدد سے تکونیاتی نسبتوں اور ان کی معکوس نسبتوں کی تعریف کرنا۔

ہم پہلے ہی پچھلی جماعتوں میں قائمہ الزاویہ مثلث θ کے کسی حادہ زاویہ کے لیے تکونیاتی نسبتوں ABC کے بارے میں سیکھ چکے ہیں۔ جیسا کہ نیچے دی گئی ہیں۔



شکل 30.10

1. $\sin\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{a}{c}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}}{\text{وتر کی لمبائی}} = \dfrac{b}{c}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}}{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}} = \dfrac{a}{b}$

اور ان کے معکوس بالترتیب ہیں

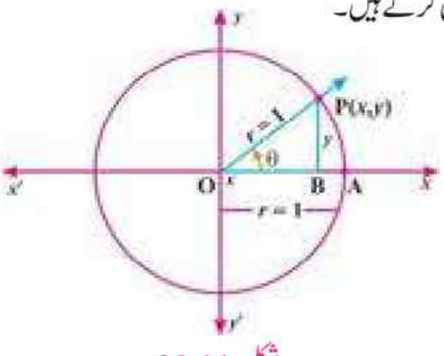
$$4.\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \frac{}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$$

$$5.\quad \sec\theta = \frac{\text{وتر کی لمبائی}}{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$$

$$6.\quad \cot\theta = \frac{\text{متصلہ ضلع کی لمبائی}}{\text{مخالف ضلع کی لمبائی}} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}$$

دائرے کے ہر نقطہ کے متقابل ہمیشہ ایک زاویہ ہوتا ہے۔

فرض کریں $P(x, y)$ اکائی دائرے میں پہلے ربع (Quadrants) میں ایک نقطہ ہے اور θ متقابلہ زاویہ ہے جیسا کہ شکل 30.1 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم تکونیاتی نسبتوں کو یوں بیان کرتے ہیں۔



شکل 30.11

$$\sin\theta = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{OP}|} = \frac{y}{1} = y,$$

$$\cos\theta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OP}|} = \frac{x}{1} = x, \quad \text{اور}$$

اب $x \neq 0$ بشرطیکہ $\tan\theta = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} = \frac{y}{x}$,

اور اس ہی طرح،

$\cot\theta = \frac{x}{y}$ بشرطیکہ $y \neq 0$

$\sec\theta = \frac{1}{x}$ بشرطیکہ $x \neq 0$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y}$ بشرطیکہ $y \neq 0$

معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں۔

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ یا $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

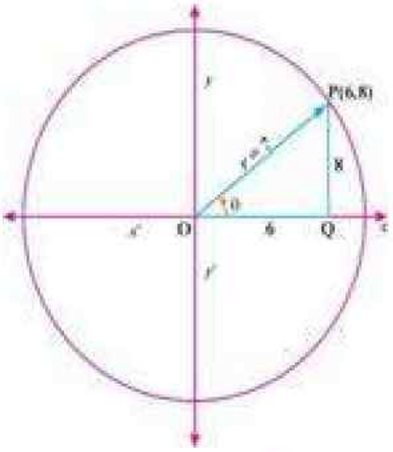
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ یا $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ یا $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

نوٹ:

- تمام تکونیاتی نسبتیں x اور y کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کہلاتی ہیں۔
- تفاعل $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ دائرے تفاعل بھی کہلاتے ہیں۔

مثال:
زاویہ θ کے لیے تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں۔ اگر نقطہ P (6,8) کے اختتامی بازو پر ہے۔



شکل 30.12

حل:
یہاں $P(x, y) = (6,8)$

جیسا کہ شکل 30.12 میں دکھایا گیا ہے $x = 6$ اور $y = 8$ $\Rightarrow$

مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad r^2 = (6)^2 + (8)^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{100} = 10, \quad \text{جبکہ} \quad r = |\overline{OP}|$$

پس تمام چھ تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں ہیں

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \qquad \text{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \sec\theta = \frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{اور} \quad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

30.3 (iv) تکونیاتی نسبتوں °30، °45 اور °60 کی قیمتوں کا اعادہ کے لیے

تکونیاتی نسبتوں °30، °45 اور °60 کی قیمتیں معلوم کرنا ہم پہلے سیکھ چکے ہیں۔ جو نیچے جدول میں دی گئی ہیں

θ	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

اب ہم معکوس تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں اوپر دی گئی جدول کی مدد سے معلوم کرسکتے ہیں۔

$$\text{cosec}30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sec30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \qquad \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

اور

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

30.3(v) مختلف ربعوں میں تکونیاتی نسبتوں کی علامت پہچاننا

اگر θ ربعی زاویہ نہیں ہے تو تکونیاتی نسبتوں کی علامت اُس کے اختتامی بازو پر نقطہ $P(x, y)$ کے مطابق معلوم کی جاسکتی ہیں۔

1. اگر θ پہلے ربع میں واقع ہے تو نقطہ $P(x, y)$ اُس کے اختتامی بازو پر واقع ہے x اور y - محور (Cordinates) مثبت ہوتے ہیں یعنی $x > 0$ اور $y > 0$

∴ تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل پہلے ربع میں مثبت ہوتے ہیں

2. دوسرے ربع میں $x < 0$ اور $y > 0$ اس لیے $\sin\theta$ اور $\operatorname{cosec}\theta$ دوسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

3. تیسرے ربع میں $x < 0$ اور $y < 0$ اس لیے $\tan\theta$ اور $\cot\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں

4. چوتھے ربع میں $x > 0$ اور $y < 0$ مثبت ہوتے ہیں اس لیے $\cos\theta$ اور $\sec\theta$ چوتھے ربع میں مثبت ہوتے ہیں اور باقی تمام نسبتیں منفی ہوتی ہیں۔

مثال: مندرجہ ذیل تکونیاتی نسبتوں / تفاعل کی علامات معلوم کریں

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 1030^\circ$ (iii) $\tan 229^\circ$ (iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

حل:

(i) $\cos 120^\circ$

∵ 120° دوسرے ربع میں واقع ہے اور $\cos\theta$ منفی دوسرے ربع میں منفی ہے۔

∴ $\cos 120^\circ$ منفی ہے

(ii) $\sin(720^0 + 310^0) = \sin 1030^\circ$

∵ یہ 310° چوتھے ربع میں واقع ہے اور چوتھے ربع میں $\sin\theta$ منفی ہے

∴ پس $\sin 1030^\circ$ منفی ہے

(iii) $\tan 229^\circ$

∵ 229° تیسرے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ تیسرے ربع میں مثبت ہے

∴ $\tan 229^\circ$ مثبت ہے۔

(iv) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{-\pi}{4}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\tan\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

$\tan \frac{-\pi}{4}$ منفی ہے

(v) $\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

∵ $\frac{-\pi}{3}$ چوتھے ربع میں واقع ہے اور $\operatorname{cosec}\theta$ چوتھے ربع میں منفی ہے

∴ $\operatorname{cosec} \frac{-\pi}{3}$ منفی ہے

30.3(v) اگر ایک تکونیاتی نسبت کی قیمت دی گئی ہو تو باقی تکونیاتی نسبتوں کی قیمتیں معلوم کریں

اس طریقے کو مندرجہ ذیل مثالوں سے سمجھایا گیا ہے

مثال 1: اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ تو باقی تمام تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں

چونکہ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

شکل 30.13 کی مدد سے

$$\frac{3}{5} = \frac{y}{r}$$

$\Rightarrow$ $y = 3$ اور $r = 5$

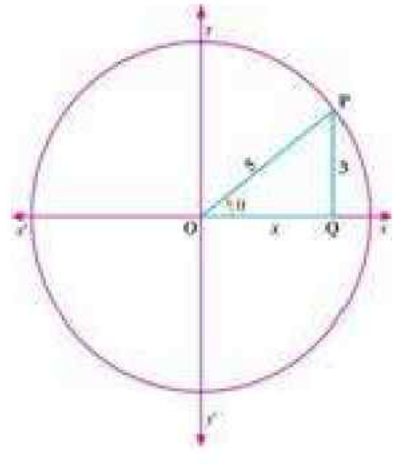
چونکہ

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + (3)^2 = (5)^2$$
$$x^2 + 9 = 25$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$\Rightarrow x^2 = 16$$
$$\Rightarrow x = 4$$

اب

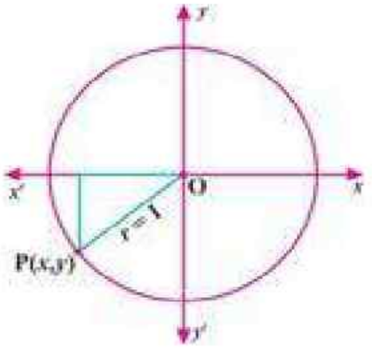
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$$
$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$



مثال2: اگر $\tan\theta = 1$ اور θ تیسرے ربع میں واقع ہے باقی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں معلوم کریں

حل:
شکل30.14 کی مدد سے



شکل 30.14

$$\therefore \quad \tan\theta = 1$$

$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

$$\because \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 = 1 \qquad \because \quad y = x$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ تیسرے ربع میں واقع ہے

$y = \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور $x = \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لیے باقی تکونیاتی تفاعل ہیں

$$\cot\theta = 1,$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = -\sqrt{2},$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

اور $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{2}$

مثال 3: اکائی دائرے کی مدد سے باقی تکونیاتی نسبتوں / تفاعل معلوم کریں اگر

(i) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(ii) $\sin\theta = 0.6$ اور $\tan\theta$ منفی ہے

حل:

$\cos\theta = x = \frac{2}{3}$, $\therefore$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{3}{2}$,

چونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے $\therefore$ جبکہ $(x, y) \in Q_1$

اور $x^2 + y^2 = 1$ (معلوم)

یہاں $x = \cos\theta$ اور $y = \sin\theta$

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

یہاں ہم مثبت قیمت لیتے ہیں کیونکہ θ پہلے ربع میں واقع ہے

$$\therefore \quad y = \frac{\sqrt{5}}{3} = \sin\theta \; ; \qquad \therefore \; \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{3}{\sqrt{5}} \; ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \qquad \therefore \; \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{اور}$$

پس مطلوبہ تکونیاتی نسبتیں ہیں

1. $\sec\theta = \dfrac{3}{2}$ 2. $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 3. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

4. $\tan \; = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ اور $= \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

حل (ii): لہذا

$$\sin y = 0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \therefore \; \operatorname{cosec}\,\theta = \frac{5}{3} = 1.6,$$

لہذا $\sin\theta > 0$ اور $\tan\theta < 0$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \quad x^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm\frac{4}{5}$$

یہاں ہم منفی قیمت لیں گے کیونکہ p(θ) دوسرے ربع میں ہے۔

$$\therefore \quad x = \cos\theta = -\frac{4}{5} = -0.8 \quad \text{اور} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} = -\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{اور} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -\frac{4}{3} = 1.3 \quad \text{اب}$$

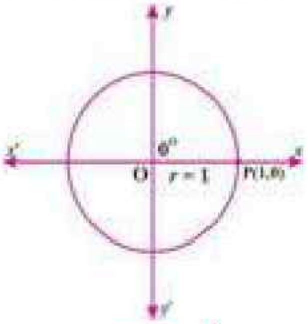
پس مطلوبہ باقی تکونیاتی نسبتیں ہیں

1. $\text{cosec}\theta = 1.6$ 2. $\cos\theta = -0.8$ 3. $\sec\theta = -1.25$

4. $\tan\theta = -0.75$ 5. $\cot\theta = -1.3$

30.3 (vii) تکونیاتی نسبتوں اور کی قیمتیں معلوم کریں $0°, 90°, 180°, 270°$ اور $360°$

ہم پہلے ہی سیکشن 30.3(ii)(b) میں ربعی زاویے زیر بحث کر چکے ہیں۔ یہاں ہم تکونیاتی نسبتوں کے ربعی زاویے معلوم کرینگے



شکل 30.15

جب $\theta = 0°$

اکائی دائرے میں نقطہ $P(1,0)$ زاویہ $0°$ کے اختتامی بازو پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $x = 1, y = 0$ اور $r = 1$ جبکہ اکائی دائرے کارداس r ہے۔

$\therefore \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$; $\quad \therefore \quad \text{cosec}0° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

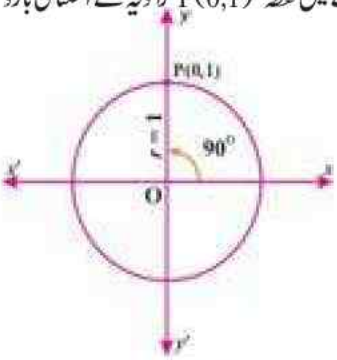
$\therefore \quad \cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$; $\quad \therefore \quad \sec 0° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$

$\therefore \quad \tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$; $\quad \therefore \quad \cot 0° = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

جب $\theta = 90°$

اکائی دائرے میں نقطہ $P(0,1)$ زاویہ کے اختتامی بازو $90°$ پر واقع ہے اور مثبت طور y - محور پر واقع ہے۔

$\therefore$ یہاں $x = 0, y = 1$ اور $r = 1.$



شکل 30.16

$\therefore \quad \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1;$

$\text{cosec}90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0;$

$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

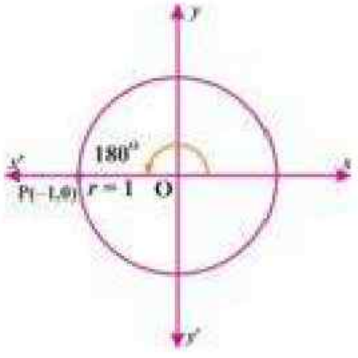
$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$ (ناقابل تعریف)

$\cot 90° = \frac{x}{y} = 0$ اور

جب $\theta = 180°$

اکائی دائرے میں، نقطہ P(-1,0) زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی x- محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$r=1$ اور $P(-1,0) \Rightarrow x=-1,\ y=0$



شکل 30.17

$$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$\therefore$ $$\operatorname{cosec} 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$$ (ناقابل تعریف)

$$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\sec 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

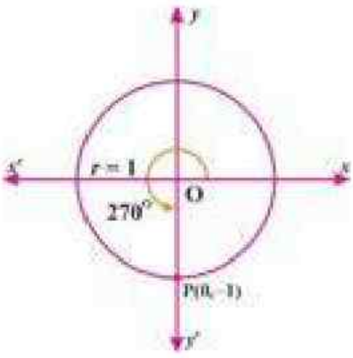
$$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0;$$

$$\cot 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$$ (ناقابل تعریف)

جب $\theta = 270^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ P(0,-1) زاویہ 180° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور منفی y- محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$\therefore$ $r=1$ اور $P(0,-1) \Rightarrow x=0, y=-1$



شکل 30.18

$\therefore$ $$\sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

$$\sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (ناقابل تعریف)

$$\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$$ (ناقابل تعریف)

اور $$\cot 270^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

جب $\theta = 360^\circ$

اکائی دائرے میں، نقطہ P(1,0) زاویہ 360° کے اختتامی بازو پر واقع ہے اور مثبت x- محور پر واقع ہے۔
اس صورت میں

$r=1$ اور $P(1,0) \Rightarrow x=1,\ y=0$

$$\therefore \quad \sin 360^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0;$$

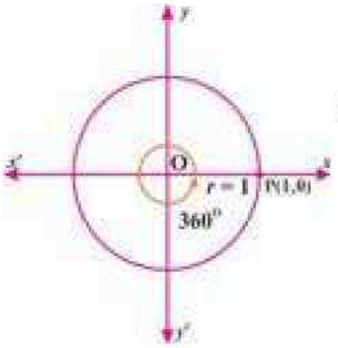
$$\operatorname{cosec} 360^\circ = \frac{1}{\sin 360^\circ} = \frac{1}{0}$$ (ناقابل تعریف)

$$\cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\sec 360^\circ = \frac{1}{\cos 360^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0;$$

اور $$\cot 360^\circ = \frac{1}{\tan 360^\circ} = \frac{1}{0}$$ (ناقابل تعریف)



شکل 30.19

تمام نتائج کے خلاصے سے ہمیں یہ جدول ملتی ہے

360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°	θ
0	−1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	sin
1	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	cos
0	−∞	0	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	tan
∞	−1	∞	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	cosec
1	∞	−1	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	sec
∞	0	∞	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	cot

مشق 30.3

1. مندرجہ ذیل زاویوں کے عمومی زاویے معلوم کریں۔

(i) 55° (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) -45° (iv) $\frac{-3\pi}{4}$

2. مندرجہ ذیل زاویوں کے ربعات کی شناخت کریں

(i) $\frac{8\pi}{5}$ (ii) 75° (iii) -818° (iv) 1090° (v) $\frac{7\pi}{6}$ (vi) $-\frac{5\pi}{4}$

3. مندرجہ ذیل کی علامت معلوم کریں۔

(i) $\cos 120^\circ$ (ii) $\sin 340^\circ$ (iii) $\sec 200^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 198^\circ$ (v) $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ (vi) $\cot\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

4. θ، کس ربع میں واقع ہے اگر

(i) $\sin\theta > 0$ اور $\cos\theta < 0$ (ii) $\cos\theta < 0$ اور $\tan\theta > 0$

(iii) $\sec\theta < 0$ اور $\sin\theta < 0$ (iv) $\sec\theta < 0$ اور $\cot\theta > 0$

(v) $\tan\theta < 0$ اور $\cos\theta < 0$ (vi) $0 < \cot\theta < 1$

5. اگر $\cos\theta = \frac{3}{5}$ اور $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$ تو بقیہ تمام تکونیاتی نسبتیں معلوم کریں

6. بقیہ تکونیاتی نسبتیں / تفاعل معلوم کریں اگر :

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$ اور θ چوتھے ربع میں واقع ہے

(iii) $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ اور θ دوسرے ربع میں واقع ہے

(iv) $\operatorname{cosec}\theta = \sec\theta = \sqrt{2}$ اور θ پہلے ربع میں واقع ہے

(v) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ اور $\tan\theta$ مثبت ہے

7. قیمتیں معلوم کریں

(i) $\tan 30^\circ \tan 60^\circ + \tan 45^\circ \cot 45^\circ$ (ii) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$ (iii) $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cot 45^\circ}$

(iv) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$ (v) $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$ (vi) $\frac{\tan 45^\circ + \cot 45^\circ}{\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ}$

30.4 تکونیاتی متطابقات (Trigonometric Identities):

متطابق ایسی مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہو (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)

30.4.1 تکونیاتی متطابقات (Trignometric Identities) کو ثابت کرنا اور انہیں مختلف تکونیاتی روابط کو ثابت کرنے کے لیے استعمال کرنا۔

ایک اکائی دائرے میں قائمہ الزاویہ مثلث متعلق کسی بھی حقیقی عدد θ کے لیے۔ ہمارے پاس مندرجہ ذیل بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں۔

(i) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = 1 + \cot\theta$

(i) ثبوت

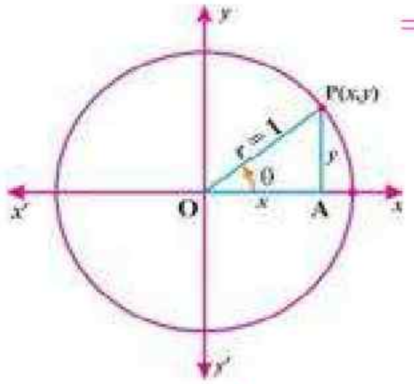
اکائی دائرے میں ΔOAP پر غور کریں جس میں $m\angle AOP = \theta$ ریڈین معیاری صورت میں

فرض کریں $P(x, y)$ زاویئے کے اختتامی بازو پر ایک نقطہ ہے

مسئلہ فیثا غورث کی رو سے ہمارے پاس $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad [\because \; x = \cos\theta \;\; \text{ﮯ} \;\; y = \sin\theta]$$

پس ثابت ہو



شکل 30.20

(ii) ثبوت: مسئلہ فیثا غورث

$$1 = x^2 + y^2$$

دونوں اطراف x^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} \;\; \text{یا} \;\; \frac{1}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta}$$ (بشرطیکہ $x = \cos\theta \neq 0$)

پس ثابت ہوا

(iii) ثبوت: مسئلہ فیثا غورث

$$1 = x^2 + y^2$$

دونوں اطراف y^2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں ملا

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + 1, \;\; \text{یا} \;\; \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

$$\Leftarrow \quad \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = (\cot\theta)^2 + 1,$$ (بشرطیکہ $\sin\theta \neq 0$)

$$\Leftarrow \quad \boxed{\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta} \qquad \left(\because \; \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right)$$

پس ثابت ہوا

مثال 1: ثابت کریں $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

پس ثابت ہوا: $\text{L.H.S} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta \qquad [\because \; \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\because$ L.H.S = R.H.S

$\because$ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

پس ثابت ہوا

مثال 2: ثابت کریں $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

ثبوت:

$$\text{L.H.S} = \sin\theta$$
$$= \sqrt{(\sin\theta)^2}$$
$$= \sqrt{\sin^2\theta},$$
$$= \sqrt{1-\cos^2\theta}, \quad \left[\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\right]$$

R.H.S =

$\therefore$ R.H.S = L.H.S

$$\therefore\ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

پس ثابت ہوا

مثال 3:

ثابت کریں $\dfrac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \dfrac{\sin\theta+\tan\theta}{\sin\theta-\tan\theta}$, (بشرطیکہ $\cos\theta \neq 0$)

ثبوت:

$$\text{L.H.S} = \frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta},$$
$$= \frac{1+\dfrac{1}{\cos\theta}}{1-\dfrac{1}{\cos\theta}},$$
$$\frac{\cos\theta+1}{\cos\theta-1}$$
$$= \frac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\sin\theta(\cos\theta-1)} \quad (\text{بشرطیکہ } \sin\theta \neq 0)$$
$$= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta-\sin\theta}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} \quad (\text{بشرطیکہ } \cos\theta \neq 0)$$

$$= \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\because$ $\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore$ $\frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} = \frac{\sin\theta + \tan\theta}{\sin\theta - \tan\theta}$

پس ثابت ہوا

مثال 4: ثابت کریں $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

ثبوت :

$\text{L.H.S} = \sin\theta,$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta,$ (بشرطیکہ $\cos\theta \neq 0$)

$= \tan\theta \cdot \cos\theta,$

$= \text{R.H.S}$

$\text{L.H.S} = \text{R.H.S}$

$\therefore$ $\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

پس ثابت ہوا

مشق 30.4

1- مندرجہ ذیل تکونیاتی متطابقات کو ثابت کریں

(i) $\sin^2\theta = (\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta$ $\quad (\cos\theta \neq 0)$

(ii) $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta + \sec\theta$ $\quad (\cos\theta \neq 0)$

(iii) $\tan\theta = \sin\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}$ $\quad (\cos\theta \neq 0)$

(iv) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(v) $\sin^3\theta = \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$

(vi) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ $\quad (\cos\theta \neq 1)$

(vii) $\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}} = \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$ $\quad (\tan\theta \neq 0)$

(viii) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$ $\quad (\tan\theta \neq 0)$

(ix) $\frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta}{\sin\theta + \tan\theta} = \operatorname{cosec}\theta \cot\theta$, $(\sin\theta \neq 0)$

(x) $\sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, $(\cos\theta \neq 0)$

(xi) $\cos^2\theta = \frac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$, $(\sin\theta \neq 0)$

(xii) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \sin\theta\cos\theta\cot\theta = 1$, $(\sin\theta \neq 0$ یا $\cos\theta \neq 0)$

2. پہلے اظہاریے کو دوسرے اظہاریے میں تبدیل کریں

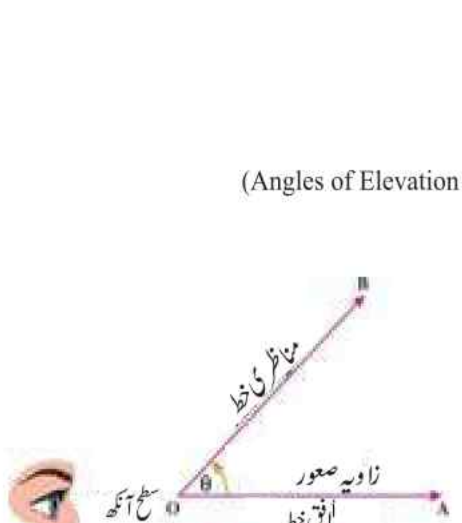
(i) $(\sec\theta+1)(\sec\theta-1)$ کو $\tan^2\theta$ میں

(ii) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\operatorname{cosec}\theta}{\cos\theta}$ کو $\tan\theta$ میں

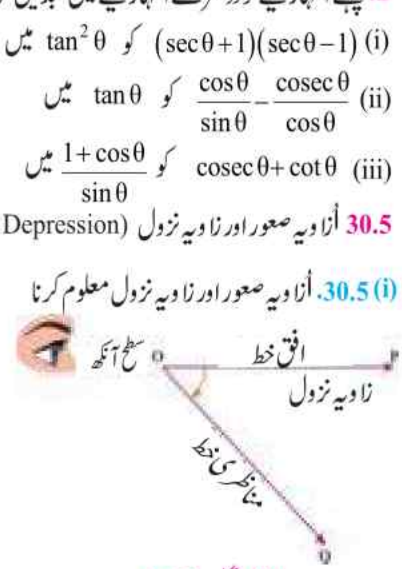
(iii) $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ کو $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ میں

30.5 ازاویہ صعور اور زاویہ نزول (Angles of Elevation and Depression)

30.5 (i) ازاویہ صعور اور زاویہ نزول معلوم کرنا



شکل 30.21: (i)



شکل 30.21 (ii)

جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے جیسا کہ شکل میں 30.2(i) دکھایا گیا ہے۔ جب ایک جسم مشاہدے کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے جیسا کہ شکل 30.2(ii) میں دکھایا گیا ہے

ہماری روز مرہ زندگی میں یہ فاصلہ معلوم کرنے کے لیئے استعمال کیا جاتا ہے زاویے کا تعلق مشاہد سے دور جسم جو مشاہدے کے مقام سے اوپر ہو یا نیچے ہو اس میں زاویہ صعود یا نزول کے استعمال پر مشتمل ہوتا

30.5 (ii) زاویہ صعود اور نزول پر مشتمل روز مرہ زندگی کے مسائل حل کرنا

مثال1: ایک بجلی کے کھمبے کی چوٹی سے زمین پر ایک نقطے پر اپنی بنیاد سے 18 میٹر دور زاویہ صعودہ 30° ہے بجلی کے کھمبے کی بلندی معلوم کریں

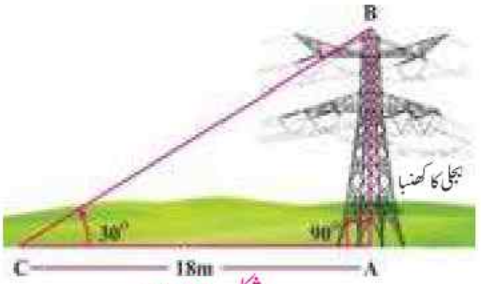
حل زاویہ صعود ایک نقط P کھمبے کی چوٹی B (آنکھ کی سطح سے اوپر) 30° ہے اور فرض کریں کنھبے کی اونچائی h ہے کھنبا نقط P سے 18 میٹر فاصلے پر ہے۔ΔPAB میں ہمارے پاس $\theta = 30°$ $|\overline{PA}| = 18\text{ m}$ ہے

$\therefore \quad \tan 30^\circ = \frac{h}{|PA|} = \frac{h}{18}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{18}$

$\Rightarrow \quad h = \frac{18}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \quad h = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ میٹر



شکل 30.22

پس بجلی کے کھنبے کی اونچائی $6\sqrt{3}$ میٹر ہے

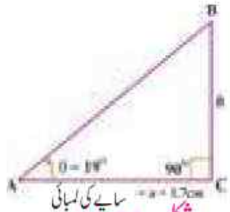
مثال 2: ایک جسم کی بلندی معلوم کریں اگر سورج کا زاویہ صعود 19 ہے اور جسم کے سائے کی لمبائی 1.7 میٹر ہے۔

حل: سورج کا ذریعہ صعود 19° یعنی $\theta = 19^\circ$ اور سایے کی لمبائی میٹر $a = 1.7$ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو

$\tan 19^\circ = \frac{h}{a} = \frac{h}{1.7}$

$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot \tan 19^\circ$

$\Rightarrow \quad h = (1.7)\cdot(0.3443) = 0.585m$



شکل 30.23

پس جسم کی مطلوبہ اونچائی 0.585 میٹر ہے

مثال 3: ٹاور کی اونچی سے جہاز کی قریبی بندر گاہ زاویہ نزول اُس کے پائی کے خط پر 40° ہے اگر ٹاور کی اونچی 35 میٹر ہے۔ جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

حل: فرض کریں 'x' فاصلہ ہے جہاز کا لفظ B سے ٹاور کا پایا نقط A تک جیسا کہ شکل دکھایا گیا ہے اور "h" ٹاور کی اونچی ہے۔

یہاں $h = 35$ میٹر (ٹاور کی اونچائی)

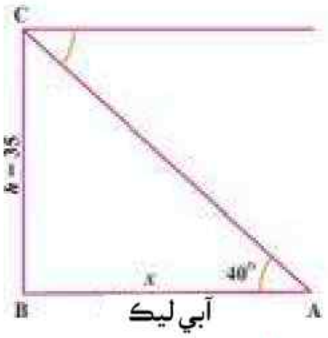
اور $\theta = 40^\circ$ (زاویہ نزول)

$x = ?$

ΔABC میں

$\tan 40^\circ = \frac{h}{x} = \frac{35}{x}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{35}{\tan 40^\circ} = \frac{35}{0.8391} = 41.71m$ (تقریباً)



شکل 30.24

پس جہاز اور ٹاور کے پائے کے درمیان فاصلہ 41.71 میٹر (تقریباً) ہے۔

مشق 30.5

1. 102 میٹر اونچے روشنی کے مینار سے جہاز کا زاویہ نزول $30^\circ 18'$ ہے۔ جہاز روشنی کے مینار سے کتنے فاصلے پر ہے۔
2. ایک سیڑھی زمین کے ساتھ 65° کا زاویہ بناتی ہے اور دیوار پر 6 میٹر کی بلندی تک پہنچتی ہے۔ سیڑھی کی لمبائی معلوم کریں۔
3. زاویہ صعود معلوم کریں جب ایک 6 میٹر بانس $2\sqrt{3}$ میٹر لمبائی کا سایہ بناتا ہے۔
4. ایک مقام سے پہاڑی کی چوٹی کا زاویہ صعود 30° کا ہے۔ اس مقام 210 میٹر پہاڑی کی طرف چلنے سے چوٹی کا زاویہ صعود 45° ہو جاتا ہے۔ پہاڑی کی بلندی معلوم کریں
5. ایک مشاہدے کا مطابق ایک غبارہ زمین سے 4280 میٹر اوپر ہے اور فارم ہاؤس 9613 میٹر دور ہے۔ غبار سے مشاہدہ کیا جائے تو فارم ہاؤس کے زاویہ نزول معلوم کریں۔

اعادہ مشق 30

1. درست جواب پر ($\surd$) کا نشان لگائیں۔

i. پیچائش کے نظام میں جو زاویہ ریڈین میں پیائش ________ کہا جاتا ہے کہتا ہے

(a) CGS نظام (b) سکسا جیسمل نظام
(c) MCS نظام (d) دائروی نظام

ii. دو غیر ہم خط شعاعوں کا یونین کا مشترکہ راس ________ کہلاتا ہے

(a) ایک زاویہ (b) ایک ڈگری
(c) ایک منٹ (d) ریڈین

iii. $10^0 =$ ________.

(a) $600''$ (b) 3600" (c) 600' (d) 600

iv. $5\frac{\pi}{4}$ ریڈین $=$ ________.

(a) 115° (b) 225° (c) 135° (d) 45°

v. $\frac{1}{2}\sec 45^\circ =$ ________.

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{1}{2}$

vi. $\operatorname{cosec}\theta \cdot \sin\theta =$ ________.

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 0.5

vii. $\sec^2\theta - \tan^2\theta =$ ________.

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\cos^2\theta$

viii. اکائی دائرے میں نقطہ p(x,y) کے لیے $\sin\theta =$ ______________.

(a) x (b) $-x$ (c) y (d) $-y$

ix. اگر $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور θ تیسرے ارباع میں واقع ہے تو $\tan\theta =$ ______________.

(a) -1 (b) 1 (c) ± 1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

x. اگر ایک جسم مشاہدہ کی سطح سے اوپر ہے تو افقی خط اور دیکھنے والے کے مناظری خط کے درمیان ______________ کہلاتا ہے۔

(a) زاویہ نزول (b) زاویہ صعود
(c) زاویہ منفرجہ (d) ان میں کوئی نہیں

2. زاویہ اور معیاری صورت میں زاویے کی وضاحت کریں۔

3. "90 '30 70° کو ریڈین میں تبدیل کریں۔

4. '(7200) میں کتنے ڈگری ہوتے ہیں۔

5. $\frac{2\pi}{3}$ ریڈین کو ڈگری پیمائش میں تبدیل کریں۔

6. $\frac{3}{\pi}$ ریڈین کو "D°M'S" شکل میں تبدیل کریں۔

7. r معلوم کریں جب کہ l=7cm اور $\theta = \frac{\pi}{4}$

8. θ معلوم کریں جب کہ قوس کی لمبائی دائرے کے رداس کے برابر ہے۔

9. ثابت کریں کہ $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta)=1$

10. قطاع دائرے کا رقبہ معلوم کریں جبکہ r=2cm اور $\theta=3$ ریڈین

خلاصہ

- دائرے کے محیط کی 360 برابر حصوں میں تقسیم اور ہر حصے کا مرکز پر بنانے والا زاویہ ایک ڈگری کہلاتا ہے اور اسے 1° سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- دائرے کے مرکز پر بننے والا اس طرح کہ قوس کی لمبائی اور دائرے کی رداس برابر ہیں تو زاویہ کی پیمائش ایک ریڈین ہے۔
- ریڈین/ڈگری کی مزید تقسیم

$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ ریڈین ≈ 0.01745 ریڈین

- دائرے کی قوس کی لمبائی معلوم کرنے کا کلیہ $l = r\theta$ ہے۔
- قطاع کا رقبہ معلوم کرنے کا کلیہ $= \frac{1}{2}lr$ or $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

- زاویے جن کے ابتدائی اور اختتامی بازو ایک جیسے ہوں ہم بازو اوے کہلاتے ہیں اور یہ 2π ریڈین کے فرق سے بنتے ہیں۔ یہ عمومی زاویے بھی کہلاتے ہیں۔
- ایک زاویہ معیاری صورت میں کہلاتا ہے اگر اس کا راس مبداء پر ہو اور اس کے ابتدائی بازو مثبت x- محور پر ہو۔
- مستطیلی محور نظام (Rectangular coordinate system) میں محور ایک مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ہر حصہ ربع (Quadrant) کہلاتا ہے جس سے چار ربعات بنتے ہیں

  زاویے 0° سے 90° کے درمیاں پہلے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 90° سے 180° کے درمیاں دوسرے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 180° سے 270° درمیان تیسرے ربع میں ہوتے ہیں

  زاویے 270° سے 360° درمیان چوتھے ربع میں ہوتے ہیں
- اگر معیاری زاویے کا اختتامی بازو x - محور اور y - محور پر واقع ہوتے ہیں تو یہ ربعی زاویے کہلاتے ہیں
- زاویہ θ کی چھ بنیادی تکونیاتی نسبتیں ہوتی ہیں $\sin\theta$، $\cos\theta$، $\tan\theta$، $\operatorname{cosec}\theta$، $\sec\theta$ اور $\cot\theta$
- معکوس نسبتیں نیچے دی گئی ہیں

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \quad \text{یا} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{یا} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{یا} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- مطابق (Identity) ایس مساوات ہوتی ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے لیئے درست ہوتی (سوائے جہاں قیمت واضح نہ ہو)
- تین بنیادی تکونیاتی متطابقات ہیں

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے اوپر ہو تو گھڑی کی مخالف سمت میں افق خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ صعود ہوتا ہے
- جب ایک جسم مشاہد کی آنکھ کی سطح سے نیچے ہو تو گھڑی کی سمت میں افقی خط سے مناظری خط کی جانب زاویہ نزول ہوتا ہے۔