یونٹ 26

دائرے کے مماس

TANGENTS OF A CIRCLE

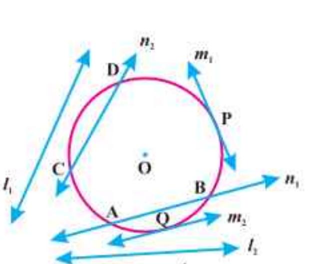
طلباء کے آموزشی حاصلات (SLOs)

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلباء اس قابل ہو جائیں گے کہ

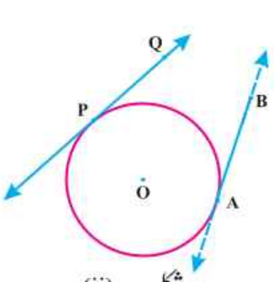
- مندرجہ ذیل اثباتی مسائل اور ان کے نتائج صریح کو سمجھ اور متعلقہ سوالات حل کرنے کے لیئے ان کو استعمال کر سکیں۔
  - اگر کسی دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود کھینچا جائے تو وہ اس نقطے پر دائرے کا مماس ہو گا۔
  - ایک دائرے پر مماس اور رداسی قطعہ جو نقط تماس کو مرکز سے ملائے ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
  - دائرے کے باہر ایک نقطے سے کھینچے جانے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
  - اگر دائرے بیرونی یا اندرونی طور پر ایک دوسرے چھوئیں تو ان کے مراکز درمیانی فاصلہ بالترتیب ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر ہوتا ہے۔

تعارف (Introduction)

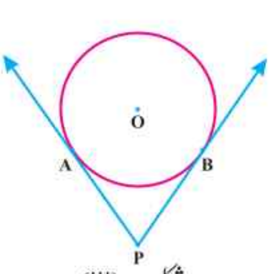
دائرے کے مماس سے تعلق مسئلے اور ثبوت پر یہاں بحث کی گئی ہے۔ مماس کا تصور ریاضی کی شاخ کیلکوس (Calculus) میں ڈبریوبٹو کی وضاحت کرنے کے لیئے بھی اہم ہے۔ ایک قطعہ خط دائرے کو قاطع کر اور نہیں بھی کر سکتا ہے۔
اگر ایک خط دائرے کو صرف ایک نقطے پر چھوتی ہے تو یہ دائرے کا مماس (Tangent) ہوتا ہے دائرے کو مماس کے درمیان نقطہ مشترکہ یانقطہ مماس (Point of tangency or point of contract) ہوتا ہے ایک خط جو دائرے کے دو نقاط کو قطع کرے دائرے کا قاطع ہوتا ہے۔ قاطع اور دائرے کے درمیان دو نقاط تماس ہوتے ہیں۔
شکل (I) میں خط l_1 اور l_2 دائرے کو نہیں چھوتے ہیں۔ خط m_1 اور m_2 بالترتیب P اور Q پر مماس ہیں۔
خط n_1 اور n_2 بالترتیب نقاط A، B، C اور D پر دائرے قاطع ہیں۔
ایک قطعہ خط نقط مماس سے مماس کے کسی دوسرے نقطے تک قطعہ مماس ہوتا ہے شکل (ii) میں $\overleftrightarrow{PQ}$ اور $\overleftrightarrow{AB}$ دائرے کے مماس ہیں۔ جبکہ $\overline{PQ}$ اور $\overline{AB}$ مماسی قطعات ہیں۔ $m\overline{AB}$ قطع مماس $\overline{AB}$ کی لمبائی ہے۔ دائرے سے باہر واقع نقطہ P سے دو مماس اور کھینچے جاسکتے ہیں۔ جیسا کہ شکل (ii) $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ کھینچے جاسکتے ہیں جیسا کہ شکل (iii) میں دکھایا گیا ہے۔



شکل (i)

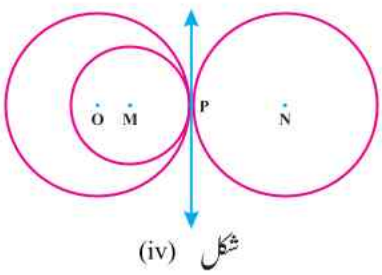


شکل (ii)

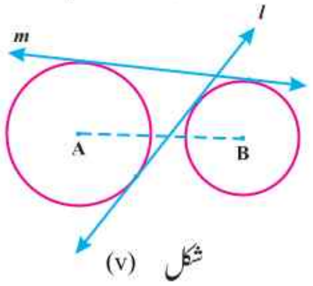


شکل (iii)

دو دائرے ایک دوسرے کو مشترکہ نقط مماس پر چھوتے ہیں نقط P دائروں کا مشترکہ نقط مماس ہے شکل (iv) میں دائروں کے مرکز O، M اور N ہیں۔ دائرے جن کے مرکز O اور M ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں۔ جبکہ دائرے جن کے مرکز O اور N ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں۔ دو دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہوں ان کے مشترک مماس ہوسکتے ہیں لیکن نقاطے تماس مختلف ہونگے دو ایک دوسرے کو چھونے والے دائروں کا مشترک مماس ایک اندرونی (یا معکوس) مشترک مماس ہے اگر وہ دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کو قطع کرتا ہو دوسری صورت میں وہ بیرونی (راست) مشترک مماس کہلائے گا۔ شکل (v) میں، خط m ایک بیرونی (راست) مشترک مماس ہے جبکہ خط l ایک اندرونی (یا معکوس) مشترک مماس ہے۔



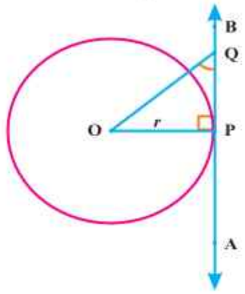
شکل (iv)



شکل (v)

26.1 دائرے کی مماس

مسئلہ 26.1 اگر کسی دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے پر عمود کھینچا جائے تو وہ اس نقطے پر دائرے کا مماس ہوگا۔



معلوم: ایک دائرے جس کا مرکز O اور رداس r ہے۔ رداسی قطع $\overline{OP}$ پر عمود $\overleftrightarrow{AB}$ کھینچا گیا ہے
یعنی $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ اُس کے بیرونی نقطہ P پر ۔

مطلوب : $\overleftrightarrow{AB}$ دیئے گئے دائرے کے صرف نقطہ P پر مماس

حل: $\overline{OQ}$ کھینچے جبکہ Q پر P کے علاوہ کوئی بیرونی نقطہ ہے۔

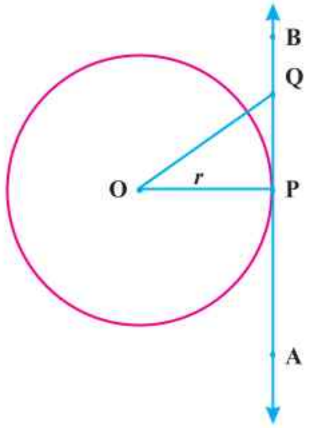
ثبوت:

بیانات	دلائل
قائمہ الزاویہ مثلث ΔOPQ $m\angle OPQ = 90°$	نقطہ پر P $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$ (معلوم)
لیکن $m\angle OQP < 90°$	مثلث میں سوائے قائمہ زاوے دو سرے زاوے حادہ ہیں
$m\overline{OQ} > m\overline{OP}$ پس Q دائرے کے باہر واقع ہے	بڑے زاویئے کا مخالف زاویہ بڑا ہوتا $m\overline{OQ} > r$
$\overleftrightarrow{AB}$ پر تمام نقاط سوائے P کے دائرے کے باہر واقع ہیں۔	Q نقطہ P کے علاوہ کوئی دوسرا نقطہ ہے۔ (عمل)
دائرے پر نقطہ مماس $\overleftrightarrow{AB}$ پر P ہے لہذا $\overleftrightarrow{AB}$ نقطہ P پر دائرے کا مماس ہے۔	مماس کے تعریف کے رو سے

Q.E.D.

مسئلہ 26.2

ایک دائرے پر مماس اور رداسی قطعہ جو نقطہ مماس کو مرکز سے ملائے ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O رداس r اور رداسی قطعہ $\overline{OP}$ نقطہ P پر ایک مماس ہے۔

مطلوب: $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

حل: $\overline{OQ}$ کھینچے، جبکہ Q نقطہ P کے علاوہ دوسرا نقطہ ہے۔

ثبوت:

دلائل	بیانات
Q نقطہ P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر دوسرا نقطہ ہے۔	Q دائرے کے باہر واقع ہے
$\overline{OP}$ رداسی قطعہ ہے۔	$m\overline{OQ} > m\overline{OP} = r$ ··· (i)
$m\overline{OP} = r$ اور P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر Q کوئی دوسرا نقطہ ہے (عمل)۔	P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر تمام نقاط کا مرکز سے فاصلہ r سے زیادہ ہے لہذا P کے علاوہ دائرے سے باہر واقع ہیں۔
(I) سے P کے علاوہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر کوئی نقطہ پر کوئی نقطہ Q۔	$\overleftrightarrow{AB}$ پر کسی نقطے اور O چھوٹا قطعہ خط $\overline{OP}$ ہے
دوسرے تمام حادہ زاویہ ہیں۔	لہذا $m\angle OPQ = 90^\circ$ $\overline{OP} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Q.E.D.

نوٹ 1: مسئلہ 26.1 اور 26.2 دائرے کے مماس اور متناظرہ نقط مماس پر رداسی قطع کے تعلق کو نمایاں کرتا ہے۔

نوٹ 2: مسئلہ 26.1 ، مسئلہ 26.2 کا عکس ہے اور الٹ

نتیجہ صریح 1: دائرے کے مماس پر نقط مماس پر جو خط عمود اکھینچا جائے دائرے کے مرکز سے گزرتا ہے۔

نتیجہ صریح 2: دائرے کے مرکز نقط عماس اور مماس پر کسی دوسرے نقط سے ملنے والا مثلث قائمتہ الزاویہ مثلث ہے

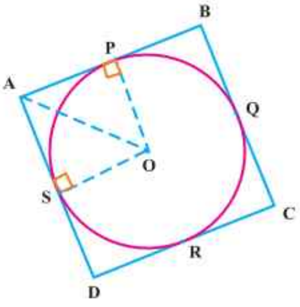
نتیجہ صریح 3: دائرے پر دئے گئے کسی بھی ایک نقطے سے ایک اور صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔

مثال 1: ثابت کریں دائرے کا محاصر متوازی الاصلاع ایک معین ہے

معلوم: ABCD $\|^m$ دائرے کا محاصر ہے۔ اس طرح $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ اور $m\overline{AD} = m\overline{BC}$

مطلوب: $ABCD$ $\|^m$ ایک معین ہے یعنی $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$

عمل: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ اور $\overline{AD}$ بالترتیب P Q R اور S پر مماس ہیں.
$\overline{OA}, \overline{OS}$ اور $\overline{OP}$ کھینچیں۔

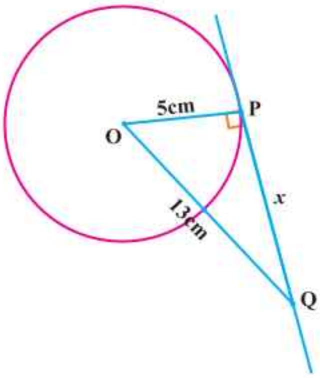


ثبوت:

بیانات	دلائل
$\Delta OSA \leftrightarrow OPA$ میں	
$\overline{OS} \cong \overline{OP}$	ایک دائرے کے رداسی قطعات
$m\angle OSA = 90^\circ = m\angle OPA$	رداسی قطعہ پر مماس عمود
$\overline{OA} \cong \overline{OA}$	مثلث کا مشترکہ ضلع
$\Rightarrow \Delta OSA \cong \Delta OPA$	و-ض ≅ و-ض
اور $m\overline{AS} = m\overline{AP} \cdots (i)$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اس ہی طرح $\Delta OPB \cong \Delta OQB$	اس ہی عمل سے
$m\overline{BQ} = m\overline{BP} \quad \cdots (ii)$	متماثل مثلثوں کے تناظرہ اضلاع اس ہی عمل سے
$\Delta OQC \cong \Delta ORC$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$m\overline{QC} = m\overline{RC} \quad \cdots (iii)$	
$\Delta ORD \cong \Delta OSD$	اس ہی عمل سی
$m\overline{DS} = m\overline{DR} \quad \cdots (iv)$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اب $m\overline{AS} + m\overline{BQ} + m\overline{QC} + m\overline{DS}$	(I) سے (iv) جمع کرنے سے
$= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{RC} + m\overline{DR}$	
یا $\left(m\overline{AS} + m\overline{DS}\right) + \left(m\overline{BQ} + m\overline{QC}\right)$	
$= \left(m\overline{AP} + m\overline{BP}\right) + \left(m\overline{RC} + m\overline{DR}\right)$	دوبارہ ترتیب دینا
یا $m\overline{AD} + m\overline{BC} = m\overline{AB} + m\overline{CD} \quad (v)$	شکل سے
$2m\overline{BC} = 2m\overline{AB} \Rightarrow m\overline{AB} = m\overline{BC} \quad (vi)$	متوازی الاضلاع کی رو سے (معلوم)
$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{AD}$	(vi) سے اور معلوم
لہذا $\|^{m}$ ABCD ایک معین ہے	

Q.E.D.

مثال 2: 5 سنٹی میٹر رداسی کے دائرے کے مرکز سے 13 سنٹی میٹر دور نقطے سے دائرے کے مماس کی لمبائی معلوم کریں



حل: فرض کریں دائرے کا مرکز O ہے نقط مماس P ہے۔ فرض کریں مرکز سے 13 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر مماس کا نقط O ہے۔ جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

شکل سے ہمیں ملا

$m\overline{PQ} = x = ?$ ، $m\overline{OQ} = 13cm$ ،$m\overline{OP} = r = 5cm$

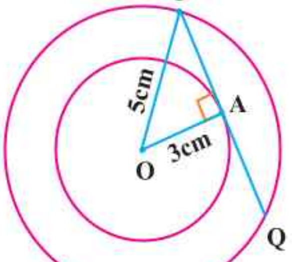
مسئلہ فیثا غورث کے استعمال سے

$$\left(m\overline{OQ}\right)^2 = \left(m\overline{OP}\right)^2 + \left(m\overline{PQ}\right)^2$$
$$(13)^2 = (5)^2 + (x)^2$$
$$169 = 25 + x^2$$
یا
$$x^2 = 169 - 25 = 144$$
$$m\overline{PQ} = x = \sqrt{144} = 12cm.$$

مثال 3: دو ہم مرکز کے رداس بالترتیب 5 سنٹی میٹر اور 3 سنٹی میٹر ہیں۔ بڑے دائرے پر نقطے سے چھوٹے دائرے تک مماس کی لمبائی معلوم کریں۔ بڑے دائرے وتر کی لمبائی بھی معلوم کریں جو چھوٹے دائرے سے چھوتا ہے۔

حل: دو ہم مرکز دیئے گئے رداس کے دائرے جن کا مشترک مرکز O ہے شکل میں دکھائے گئے ہیں $m\overline{OA} = 3\text{cm}$ اور $m\overline{OP} = 5\text{cm}$

ہمیں سب سے پہلے $m\overline{AP}$ اور $m\overline{AQ}$ معلوم کرنا ہے۔ یعنی چھوٹے دائرے نقطہ P سے اور بڑے دائرے نقطہ Q تک قطع مماس کی لمبائی مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے ہمارے پاس ہے۔



$$\left(m\overline{OP}\right)^2 = \left(m\overline{OA}\right)^2 + \left(m\overline{AP}\right)^2$$

$$25 = 9 + \left(m\overline{AP}\right)^2$$

یا $\Rightarrow \quad \left(m\overline{AP}\right)^2 = 16$

یا $m\overline{AP} = 4\text{cm}$

لیکن رداس قطعہ $\overline{OA}$ وتر $\overline{PQ}$ کی تنصیف کرتا ہے

تو $m\overline{AP} = m\overline{AQ}$

$\Rightarrow \quad m\overline{AQ} = 4cm$

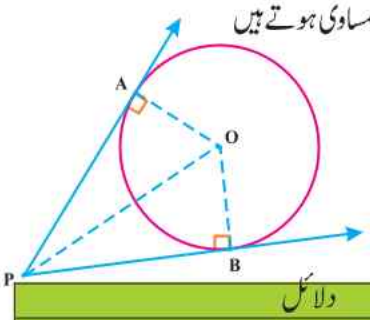
آخر کار بڑے دائرے $\overline{PQ}$ کے وتر کی لمبائی چاہیے جو چھوٹے دائرے کو چھوتا ہے۔ جو یہ ہے

$$m\overline{PQ} = m\overline{AP} + m\overline{AQ} = 8cm$$

مشق 26.1

1. ثابت کریں کہ دائرے کا محاصر مثلث مساوی الاضلاع مثلث ہوتا ہے۔
2. ثابت کریں کہ دائرے کا محاصر مستطیل ضرور مربع ہوتا ہے۔
3. دو اہم مرکز دائرے رداس بالترتیب 10 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں۔ قطعہ مماس کی لمبائی معلوم کریں جو چھوٹے دائرے سے بیرونی دائرے کے ایک نقطے کو چھوتا ہے۔ بیرونی دائرے کے وتر کی لمبائی بھی معلوم کریں جو اندرونی دائرے کو چھوتا ہے۔
4. قطعہ مماس کی لمبائی، 5 سنٹی میٹر کے فاصلہ پر ایک نقطے سے 4 سنٹی میٹر ہے دائرے کا قطر، محیط اور رقبہ معلوم کریں۔
5. 7 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کے قطعہ مماس کی لمبائی معلوم کریں جس کا دائرے کے مرکز سے ایک نقطہ تک فاصلہ 25 سنٹی میٹر ہے۔
6. 3 سنٹی میٹر رداس کے دائرے کے مرکز سے کتنی دور 10 سنٹی میٹر لمبائی کا قطعہ مماس کھینچا جاسکتا ہے۔

مسئلہ 26.3: دائرے کے باہر ایک نقطے سے کھینچے جانے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں



معلوم: دائرے کے باہر ایک نقطہ P سے دائرے کے نقاط A اور B پر دو مماس $\overrightarrow{PA}$ اور $\overrightarrow{PB}$ ہیں۔

مطلوب: $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

عمل: $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ اور $\overline{OP}$ کھینچیے

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle OAP = 90^\circ$ اور $\overline{OA} \perp \overrightarrow{PA}$	مماس، رداسی قطعہ پر عمود ہے۔
اس طرح $m\angle OBP = 90^\circ$ و $\overline{OB} \perp \overrightarrow{PB}$	مماس، رداسی قطعہ پر عمود ہے
قائمۃ الزاویہ مثلث میں $\Delta OAP \leftrightarrow \Delta OBP$	
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترک ضلع
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$	ایک ہی دائرے کے رداسی قطعات
$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$	و-ض ≅ و-ض
$\therefore$ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

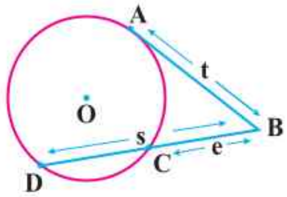
Q.E.D.

نوٹ 1: مسئلہ 26.3 ظاہر کرتا ہے کہ دائرے کے باہر کسی نقطے پر ایک دوسرے کو قطع کرنے والے دو مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 1: بیرونی نقطہ سے ایک دائرے پر کھینچے جانے والے دو مماس مرکز پر متماثل زاویے بناتے ہیں

نتیجہ صریح 2: دائرے کے دو متوازی مماس کی بھی ایک بیرونی نقطہ پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے ہیں۔

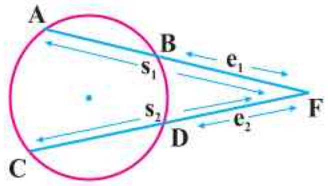
نوٹ 2: اگر دائرے کا مماس اور قاطع باہر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو قطعہ مماس کی لمبائی



لمبائی کا مربع برابر ہوتا ہے قاطع کی لمبائی اور بیرونی حصے کی حاصل ضرب کے یعنی

$$t^2 = s \cdot e \quad \text{یا} \quad \left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right) \cdot \left(m\overline{BC}\right)$$

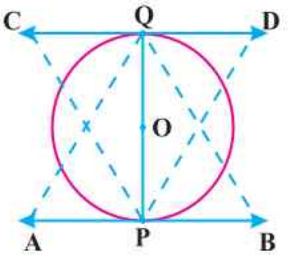
نوٹ 3: اگر دو قاطع دائرے کے باہر قطع کرتے ہیں جیسا کہ متعلہ شکل میں دکھایا ہے تو



$$s_1 e_1 = s_2 e_2 \quad \text{یا} \quad \left(m\overline{AF}\right) \times \left(m\overline{BF}\right) = \left(m\overline{CF}\right) \times \left(m\overline{DF}\right)$$

مثال 1:

ثابت کریں کہ دائرے کے قطر کے سروں پر مماس کھینچا جائیں تو متوازی ہوتے ہیں۔



معلوم: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے۔ قطر کے سروں P اور Q پر بالترتیب $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{CD}$ مماس ہیں

مطلوب: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

عمل: $\overline{BQ}$ اور $\overline{AQ}, \overline{DP}, \overline{CP}$ کھینچیں

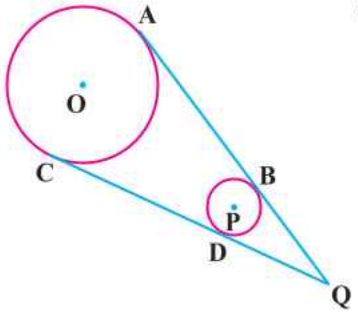
ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\angle APO = 90^\circ = m\angle BPO$	$\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{OP}$
$m\angle CQO = 90^\circ = m\angle DQO$	$\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{OQ}$
(i) $m\angle CPQ = m\angle BQP$	متبادلہ زاویے
اور (ii) $m\angle AQP = m\angle QPD$	متبادلہ زاوئے
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$	ایک ہی متبادلہ اندورنی زاویے مساوات (i) اور (ii) سے

Q.E.D

مثال 2:

ثابت کریں کہ دو دائرے کے راست مشترکہ مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں



معلوم: دائروں کے راست مشترکہ مماس $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ ہیں۔ دائروں کے مرکز O اور P ہیں۔

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

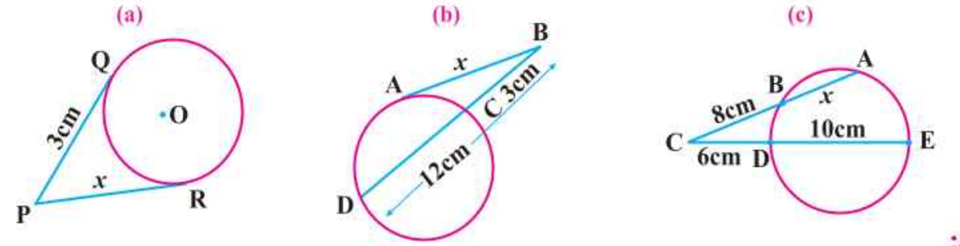
عمل: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ بڑھائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کو نقطہ Q پر قطع کریں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
$m\overline{AQ} = m\overline{CQ}$ (i)	O سے باہر نقطہ Q سے مماس کھینچیں
$m\overline{BQ} = m\overline{DQ}$ (ii)	P سے باہر نقطہ Q سے مماس کھینچیں
$m\overline{AQ} - m\overline{BQ} = m\overline{CQ} - m\overline{DQ}$	(I) سے (ii) کو تفریق کرنے سے
$\therefore$ $m\overline{AB} = m\overline{CD}$	شکل کے استعمال سے

Q.E.D.

مثال 3: مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم x کی لمبائی معلوم کریں



حل:

(a). مماس $\overline{PQ}$ اور $\overline{PR}$ دائرے کے باہر نقطہ P پر ملتے ہیں لہذا ان کی لمبائی مساوی ہونی چاہیے

یعنی $m\overline{PQ} = m\overline{PR}$ اس لیئے $x = 3\text{cm}$

(b). مماس دائرے کے باہر نقطہ B پر $\overline{AB}$ قاطع $\overrightarrow{DC}$ سے ملتا ہے لہذا ہمارے پاس ہے۔

$\left(m\overline{AB}\right)^2 = \left(m\overline{DB}\right)\cdot\left(m\overline{BC}\right)$ یا $x^2 = 12\times 3 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6cm.$

(c). دائرے کے دو قاطع $\overleftrightarrow{AB}$ اور $\overleftrightarrow{ED}$ دائرے کے باہر نقطہ C پر قطع کرتے ہیں لہذا ہمارے پاس ہے۔

$\left(m\overline{AC}\right)\times\left(m\overline{BC}\right) = \left(m\overline{EC}\right)\times\left(m\overline{CD}\right)$ یا $(x+8)\times 8 = (10+6)\times 6 \Rightarrow 8x + 64 = 96$

آخر کار $8x = 96 - 64 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4\text{cm}$

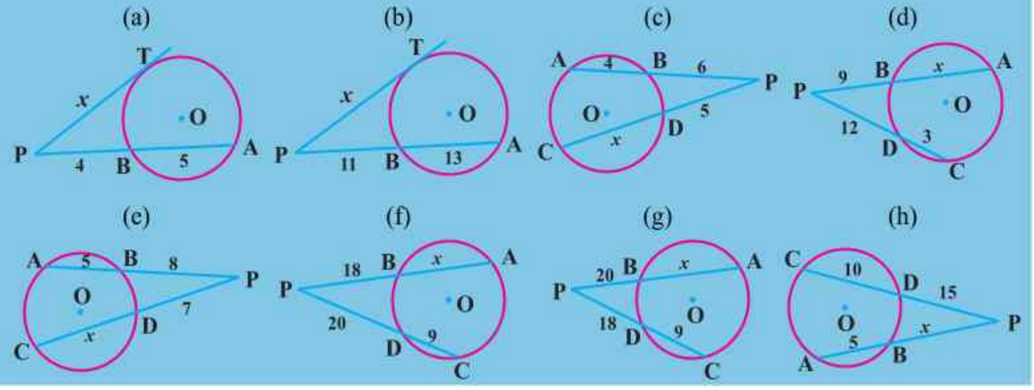
مشق 26.2

1. ثابت کریں کہ ایک دائرے میں وتر کے سروں پر کھینچے گئے مماس وتر کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

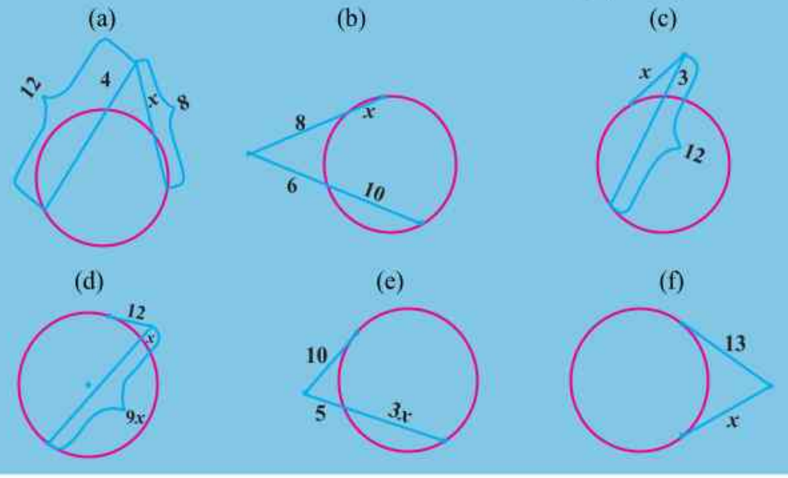
2. ثابت کریں کہ اگر دائرے میں دو مماس متوازی ہیں تو نقاط مماس دائرے کے قطر کے سرے ہونگے۔

3. ثابت کریں کہ اگر دائرے کے دو مماس متوازی نہیں ہیں نقاط مماس دائرے کے وتر کے سرے ہونگے۔

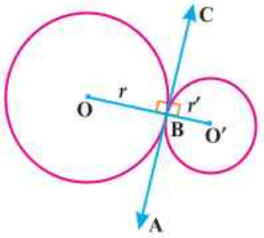
4. مندرجہ ذیل میں نامعلوم x معلوم کریں



5. مندرجہ ذیل میں نامعلوم x معلوم کریں



مسئلہ 26.4 صورت (A)



اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوئیں تو ان کے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کی مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز O اور O′ اور رداس بالترتیب r اور r' ہیں۔
دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر نقطہ B پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: $m\overline{OO'} = r + r'$

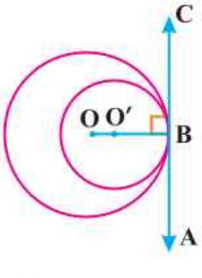
حل: دونوں دائروں پر نقطہ B سے مشترک مماس کھینچیے۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
(i) ⋯ $m\angle OBC = 90°$ لہٰذا $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$	مماس رادسی قطعہ پر عمود ہے
(ii) ⋯ $m\angle O'BC = 90°$ لہٰذا $\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$	مماس، رادسی قطعہ پر عمود ہے
(iii) ⋯ $m\angle OBC + m\angle O'BC = 180°$	(I) اور (ii) جمع کرنے سے
O، B اور O′ اہم خط ہیں اور، O اور O′ کے درمیان B واقع ہے	(I)، (ii) اور (iii) رو سے
$\therefore \quad m\overline{OB} + m\overline{O'B} = m\overline{OO'}$	تعریف کی رو سے
یا $m\overline{OO'} = r + r'$	$m\overline{O'B} = r'$ ؛ $m\overline{OB} = r$

Q.E.D.

مسئلہ 26.4 صورت (B) اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوئیں تو انکے مراکز کا درمیانی فاصلہ ان کے رداسوں کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔



(A)

معلوم: دو دائرے جن کے مراکز O اور O′ اور رداس بالترتیب r اور r' ہیں۔
دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر نقطہ B پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: $m\overline{OO'} = r - r'$

عمل: دونو دائروں پر نقطہ B سے مشترک مماس $\overleftrightarrow{AC}$ کھینچیں۔

ثبوت:

بیانات	دلائل
لہٰذا $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ (i) $m\angle OBC = 90°$	مماس، رداس قطعہ پر عمود ہے۔
لہٰذا $\overline{O'B} \perp \overleftrightarrow{AC}$ (ii) $m\angle O'BC = 90°$	مماس، رداس قطعہ پر عمود ہے۔
(iii) $m\angle OBC = m\angle O'BC = 90°$ O′، O اور B ہم خط ہیں اور O، O′ اور B کے درمیاں واقع ہیں۔	(I) اور (ii) سے (i)، (ii) اور (iii) سے
$\therefore$ (iv) $m\overline{OO'} = m\overline{O'B} + m\overline{OB}$ یا $m\overline{OO'} = m\overline{OB} - m\overline{O'B} = r - r'$	تعریف کی رو سے (iv) سے اور $m\overline{OB} = r$، $m\overline{O'B} = r'$.

Q.E.D.

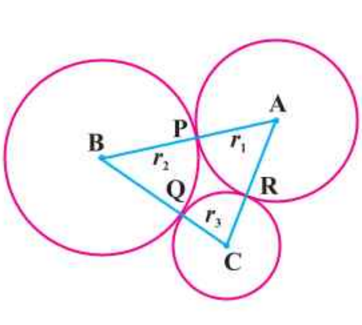
نتیجہ صریح 1:

اگر دو دائرے کا درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے (فرق) کے برابر ہو تو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی (اندرونی) طور پر چھوتے ہیں۔

نتیجہ صریح 2:

اگر دو دائرے کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے یا فرق کے برابر نہ ہو تو دائرے ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہیں۔

مثال 1: اگر تین دائرے جوڑے کی صورت میں بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں تو ان کے مراکز کو ملانے بنانے والا مثلث کا احاطہ ان کے رداسوں کے مجموعے کے دو گنا کے برابر ہوتا ہے۔



معلوم: تین دائرے جن کے مرکز A، B، C اور رداسی بالترتیب r_1، r_2، r_3 ہیں
اور جوڑے کی صورت میں نقاط P، Q اور R پر بیرونی طور پر چھوتے ہیں۔

مطلوب: ΔABC کا احاطہ $= 2(r_1 + r_2 + r_3)$

عمل: ΔABC مثلث بنانے کے لیئے P، Q اور R کے ذریعے بالترتیب $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ بنائیں۔

ثبوت:

بیانات		دلائل
$m\overline{AB} = m\overline{AP} + m\overline{BP}$	(i)	P نقاط A اور B کے درمیان واقع ہے
$m\overline{BC} = m\overline{BQ} + m\overline{CQ}$	(ii)	Q نقاط B اور C کے درمیان واقع ہے
$m\overline{AC} = m\overline{AR} + m\overline{CR}$	(iii)	R نقاط A اور C کے درمیان واقع ہے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= m\overline{AP} + m\overline{BP} + m\overline{BQ} + m\overline{CQ} + m\overline{AR} + m\overline{CR}$		(i)، (ii) اور (iii) جمع کرنے سے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC}$ $= \left(m\overline{AP} + m\overline{AR}\right) + \left(m\overline{BP} + m\overline{BQ}\right) + \left(m\overline{CQ} + m\overline{CR}\right)$		دوبارہ بالترتیب دینے سے
$m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{AC} = (r_1 + r_1) + (r_2 + r_2) + (r_3 + r_3)$ $= 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ لہٰذا $\Delta ABC = 2(r_1 + r_2 + r_3)$ کا احاطہ		$m\overline{AP} = m\overline{AR} = r_1$ $m\overline{BP} = m\overline{BQ} = r_2$ $m\overline{CQ} = m\overline{CR} = r_3$

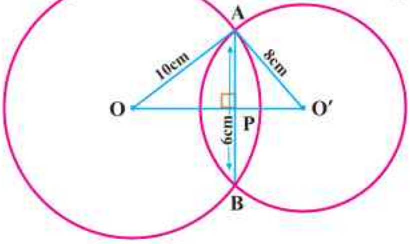
Q.E.D.

مثال 2: دو متقاطع دائروں کے رداس 10 سنٹی میٹر اور 8 سنٹی میٹر اگر ان کے مشترکہ وتر کی لمبائی 6 سنٹی میٹر ہے۔ ان کے مرکزوں کے درمیان کیا ہے۔

حل: دائرے جن کے مراکز O اور O′ رداس بالترتیب 10 سنٹی میٹر اور 8 سنٹی میٹر ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ شکل سے ہمارے پاس ہے

$$m\overline{OA} = 10\text{cm},\ m\overline{O'A} = 8\text{cm},\ m\overline{AB} = 6\text{cm},\ m\overline{OO'} = ?$$

P، $\overline{AB}$ کی تنصیف کرتا ہے لہٰذا $m\overline{AP} = \frac{1}{2}m\overline{AB} = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$



ΔAPO میں، مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$10^2 = 3^2 + \left(m\overline{OP}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ m\overline{OP} = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}\text{cm.}$$

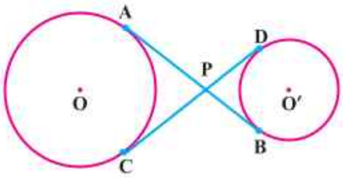
$\Delta APO'$ میں، مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$8^2 = 3^2 + \left(m\overline{O'P}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ m\overline{O'P} = \sqrt{64-9} = \sqrt{55}\text{cm}$$

آخر کار $m\overline{OO'} = m\overline{OP} + m\overline{O'P} = \sqrt{91} + \sqrt{55} = 16.955\text{cm}$ (تقریباً)

مثال 3: دو دائروں کے دو مشترکہ معکوس مماس لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔



معلوم: $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ دو دائروں کے دو مشترکہ معکوس مماس ہیں۔
دائروں کے مرکز بالترتیب O اور O′ ہیں

مطلوب: $m\overline{AB} = m\overline{CD}$

عمل: مماس $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ نقطہ P پر ایک دوسرے قطع کرتے ہیں

ثبوت:

دلائل	بیانات
دائرے کے باہر نقطے سے مماس	(i) $m\overline{AP} = m\overline{CP}$
دائرے کے باہر نقطے سے مماس	(ii) $m\overline{BP} = m\overline{DP}$
(i) اور (ii) جمع کرنے سے	(iii) $m\overline{AP} + m\overline{BP} = m\overline{CP} + m\overline{DP}$
(iii) اور شکل سے	$\Rightarrow \quad m\overline{AB} = m\overline{CD}$

Q.E.D

مثال 4: دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں اور ان کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی 7 سنٹی میٹر ہے۔ اگر ایک دائرے کا رداس 3 سنٹی میٹر ہے تو دوسرے دائرے کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: دو دائرے بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں لہٰذا مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی $= r_1 + r_2$

$$7 = 3 + r_2$$

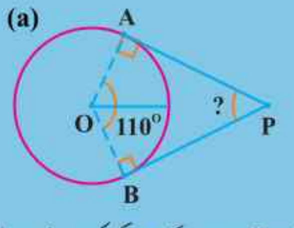
$$\Rightarrow \quad r_2 = 7 - 3 = 4cm.$$

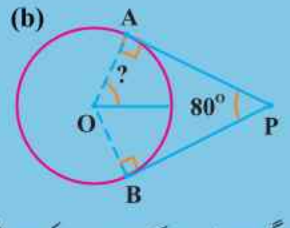
اب دوسرے دائرے کا رقبہ $= \pi r_2^2 = \pi \cdot (4)^2 = 16\pi \text{cm}^2$

$$= 16\left(\frac{22}{7}\right)\text{cm}^2 = 50.286\text{cm}^2$$ (تقریباً)

مشق 26.3

1. اگر دائروں کے مراکز کو ملانے والے قطعہ کی لمبائی دائروں کے رداسوں کا مجموعہ ہے تو ثابت کریں کہ دائرے بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔
2. اگر مثلث کا احاطہ جس کے رداس تین دائروں کے مرکز ہیں ان کے قطروں کے مجموعہ کے برابر ہے تو ثابت کریں کہ تینوں دائرے جوڑی کی صورت میں بیرونی طور پر ایک دوسرے کو چھوتے ہیں۔
3. اگر دو متماثل دائروں کو بیرونی طور پر چھونے والے قطعہ کی لمبائی 12 سنٹی میٹر ہے تو دائروں کے رداس اور محیط معلوم کریں۔
4. اگر $\overline{PA}$ اور $\overline{PB}$ دیئے گئے دائرے پر باہر نقطہ P سے مماس ہیں جیسا کہ مشکل میں دیا گیا ہے۔ نامعلوم زاویہ معلوم کریں





5. ثابت کریں کہ اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو نقطہ تماس ان کے مراکز کو ملانے والے قطعہ پر واقع ہوتا ہے۔

6. اگر 2.5 سنٹی میٹر رداس کے دائرے میں دو وتر 3.9 سنٹی میٹر کے فاصلے پر ہیں اور ایک وتر کی لمبائی 1.4 سنٹی میٹر ہو تو دوسرے وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

7. اگر دائرے جوڑے کی صورت میں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں اور دو دائروں کے رداس 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں تو ہیں اور دو دائروں کے رداسی 4 سنٹی میٹر اور 5 سنٹی میٹر ہیں تو تیسرے دائرے کا رداس معلوم کریں اگر ان کے مراکز سے بننے والے مثلث کا احاطہ 35 سینٹی میٹر ہے۔

اعادہ مشق 26

1. درست جواب پر کا نشان لگائیں

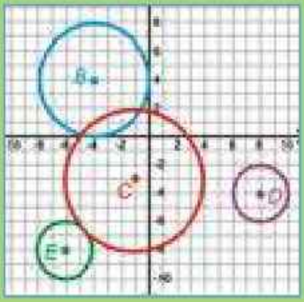
i. اگر دائرے کے باہر ایک نقطہ ہے تو اس نقطے ہم ________ مماس کھینچ سکتے ہیں۔

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) کوئی نہیں

ii. مماس اور رداس قطعہ کے درمیان بیرونی سرے پر زاویہ ________ ہوتا ہے۔

(a) 45^0 (b) 60^0 (c) 90^0 (d) 120^0

iii. متصلہ شکل میں، مراکز E اور C کے دائرے ایک دوسرے کو ________ ہیں۔



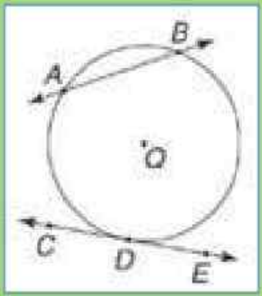
(a) اندرونی طور پر چھوتے (b) بیرونی طور پر چھوتے
(c) نہیں چھوتے (d) متماثل

iv. متصلہ شکل میں مراکز B اور C کے دائروں کے ________ نقط تماس ہیں۔

(a) کوئی نہیں (b) ایک
(c) دو (d) ان میں کوئی نہیں

v. متصلہ شکل میں مراکز E اور C کے دائروں کے ________ نقط تماس ہیں۔

(a) کوئی نہیں (b) ایک
(c) دو (d) ان میں کوئی نہیں



vi. متصلہ شکل میں AB ________ ہے۔

(a) مماس (b) قاطع
(c) وتر (d) ان میں کوئی نہیں

vii. متصلہ شکل میں CDE ________ ہے۔

(a) مماس (b) قاطع
(c) وتر (d) ان میں کوئی نہیں

viii. متصلہ شکل میں ________ نقطہ مماس ہے۔

(a) A (b) B (c) C (d) D

ix دائرے کے قطر کے سروں پر کھینچے جانے والے مماس ایک دوسرے کے / پر ________ ہوتے ہیں۔

(a) متوازی (b) عمود (c) تقاطع (d) اور دونوں

x. دو اندرونی طور پر چھونے والے دائروں کے مشترکہ مماسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد ________ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

xi. دو بیرونی طور پر چھونے والی دائروں کے مشترک مماسوں کی زیادہ سے زیادہ تعداد ________ ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

خلاصہ

- ایک خط دو دائروں کے صرف ایک نقط چھوتا ہے دائرے کا مماس ہوتا ہے اور مشترک نقط، نقط مماس یا نقط تماس کہلاتا ہے۔
- ایک خط جو دائرے کے دو نقاط کو قطع کرتا ہے دائرے کا قاطع ہوتا ہے۔ دائرے اور قاطع کے درمیان دو نقاط تماس ہیں
- مماس قطعہ نقط مماس سے مماس پر کسی دوسرے نقط تک قطعہ خط ہوتا ہے۔
- دائرے کے مرکز، نقطہ مماس اور مماس کے کسی دوسرے نقط کو ملانے سے ہمیشہ قائمۃ الزاویہ مثلث بناتا ہے۔
- جب دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی یا بیرونی طور پر چھوتے ہیں وہ ان کے درمیان مشترکہ مماس اور مشترکہ نقط تماس دیتے ہیں
- دو دائرے جو ایک دوسرے کو نہیں چھوتے ہیں مشترک مماس ہو سکتا ہے۔ بیرونی (راست) اور اندرونی (معکوس) مشترکہ مماس
- دو دائروں کے دو راست مشترک مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
- دو دائروں کے معکوس مشترک مماس لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں
- دائرے پر ایک نقطے سے صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔
- اگر ایک خط دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی سرے عموداً کینچھی جائے تو اس نقط پر دائرے کا مماس ہوگی۔
- دائرے کا مماس اور نقطہ مماس اور دائرے کے مرکز ملانے والی رداسی مماس ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
- دائرے کے باہر ایک نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچے جائیں وہ لمبائی میں مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو بیرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مراکزوں کے درمیان فاصلہ ان کے رداسوں کے مجموعے کے برابر ہوتا ہے۔
- اگر دو دائرے ایک دوسرے کو اندرونی طور پر چھوتے ہیں تو ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ان کے فرق کے برابر ہوتا ہے۔