یونٹ

3

ALGEBRAIC MANIPULATION الجبری مہارت

- H.C.F اور L.C.M
- الجبری کسور پر بنیادی عوامل
- الجبری کسور کا جذر

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- الجبری جملوں کا عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں۔
- تجزی یا تقسیم کے طریقہ سے عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کر سکیں۔
- عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل میں تعلق جان سکیں۔
- کسری جملوں جن میں + ، − ، × ، ÷ کو استعمال کیا گیا کو HCF اور LCM کی مدد سے مختصر کر سکیں۔
- الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔

3.1 عاداعظم (HCF) اور ذواضعاف اقل (LCM)

HIGHEST COMMON FACTOR (HCF) AND LEAST COMMON MULTIPLE (LCM)

3.1.1 عاداعظم (HCF) Highest Common Factor (HCF)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم ایک بڑے سے بڑے درجے کا ایسا مشترکہ جملہ ہوتا ہے جو کہ ان میں سے ہر ایک جملے کو بغیر "باقی" کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

عاداعظم کا اختصار HCF ہے۔

ہم دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم (HCF) درج ذیل طریقوں سے معلوم کر سکتے ہیں:

(i) بذریعہ تجزی (ii) تقسیم کے عمل سے

بذریعہ تجزی عاداعظم HCF معلوم کرنا: HCF BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی عاداعظم معلوم کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1:-

$4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا عاداعظم HCF معلوم کریں۔

حل:

$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$ کی تجزی

$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$ کی تجزی

$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$ کی تجزی

مشترک اجزائے ضربی : $2 \times 2 \times p \times p \times q$

پس $HCF = 4p^2q$ عاداعظم

مثال 2:-

$2x^2 - x - 1$ ، $2x^2 + 5x + 2$ اور $2x^2 + 3x + 1$ کا عاداعظم معلوم کریں

حل:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1 \quad \text{کی تجزی}$$
$$= 2x(x+1) + 1(x+1)$$
$$= (2x+1)\ (x+1)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + x + 2 \quad \text{کی تجزی}$$
$$= 2x(x+2) + 1(x+2)$$
$$= (2x+1)\ (x+2)$$

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1 \quad \text{کی تجزی}$$
$$= 2x(x-1) + 1(x-1)$$
$$= (2x+1)\ (x-1)$$

مشترک جزوضربی $= 2x + 1$

پس عاداعظم $= 2x + 1$

مثال 3:-

$20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$ اور $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ کا عاداعظم معلوم کریں

حل: فرض کیا

$$P(x) = 24(6x^4 - x^3 - 2x^2) \quad \text{کی تجزی}$$
$$= 24x^2(6x^2 - x - 2)$$
$$= 24x^2\left[6x^2 - 4x + 3x - 2\right]$$
$$= 24x^2\left[2x(3x-2) + 1(3x-2)\right]$$
$$P(x) = 24x^2(2x+1)(3x-2) = 2^2 \times 2 \times 3 \times x^2(2x+1)(3x-2)$$

اور فرض کیا

$$Q(x) = 20(2x^6 + 3x^5 + x^4) \quad \text{کی تجزی}$$
$$= 20x^4\left[2x^2 + 3x + 1\right]$$
$$= 20x^4(2x^2 + 2x + x + 1)$$
$$= 20x^4\left[2x(x+1) + 1(x+1)\right]$$
$$= 20x^4(x+1)(2x+1)$$
$$= 2^2 \times 5 \times x^2 \times x^2(x+1)(2x+1)$$

مشترک جزوضربی $= 2^2 \times x^2 \times (2x+1)$

پس عاداعظم $= 4x^2\ (2x+1)$

مثال 4:-

x^2+x-6 ، $x^2-7x+10$ اور x^2-4 کا عاد اعظم معلوم کریں

حل:

x^2-4 کے اجزائے ضربی $= (x-2)(x+2)$

$x^2-7x+10$ کے اجزائے ضربی $= x^2-5x-2x+10$
$= x(x-5)-2(x-5)$
$= (x-5)(x-2)$

x^2+x-6 کے اجزائے ضربی $= x^2+3x-2x-6$
$= x(x+3)-2(x+3)$
$= (x+3)(x-2)$

مشترک جزو ضربی $= x-2$
پس عاد اعظم $= x-2$

مشق 3.1

تجزی کے ذریعے عاد اعظم معلوم کریں۔

1. $abxy$, a^2bc
2. $6pqr$, $15qrs$
3. $8xy^2z^3$, $12x^2y^2z^2$
4. $14a^2bc$, $21ab^2$
5. $3x^5y^2$, $12x^2y^4$, $15x^3y^2$
6. $4abc^3$, $8a^3bc$, $6ab^3c$
7. x^3+64 , x^2-16
8. x^2-y^2 , x^4-y^4 , x^6-y^6
9. t^2-9, $(t+3)^2$, t^2+t-6
10. x^2-x-2, x^2+x-6, x^2-3x+2
11. $1-x^2$, x^3+1, $1-x-2x^2$
12. x^3-8, $x^2-7x+10$
13. x^2+3x+2, x^2+4x+3, x^2+5x+4
14. $x^4+x^3-6x^2$, x^4-9x^2, x^3+x^2-6x
15. $35a^2c^3b$, $45a^3cb^2$, $30ac^2b^3$

بذریعہ تقسیم عاداعظم HCF معلوم کرنا HCF BY DIVISION METHOD

تقسیم کے قاعدے سے عاداعظم معلوم کرنے کے لیے دیے گئے جملوں کو ان کے مشترک متغیر کی قوت نماؤں کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھیے۔

بڑے درجے کی کثیر رقمی کو چھوٹے درجے کی کثیر رقمی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔ پہلے والے تقسیم کنندہ کو مقسوم علیہ بنا کر باقی کو تقسیم کنندہ بنا لیجیے اور تقسیم کر کے باقی معلوم کریں۔ اس عمل کو جاری رکھیں یہاں تک کہ صفر باقی بچے۔ آخری تقسیم کنندہ مطلوبہ عاداعظم ہے۔

مثال 1:-

$(x^3 - x^2 + x - 1)$ ، $(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ کا عاداعظم تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 & x^3 - x^2 - 3x + 3 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \pm x \mp 1 \\ \hline & -4x + 4 = -4(x-1) \end{array}$$

$-4(x-1)$ کو -4 سے تقسیم کرنے سے ہمیں $(x-1)$ حاصل ہوا

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ x - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \\ \hline & x - 1 \\ & \pm x \mp 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x - 1$ = عاداعظم

یاد رکھیے:

عاداعظم معلوم کرتے وقت کسی بھی کثیر رقمی کو کسی ہندسے سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے عاداعظم متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 2:-

بذریعہ تقسیم $5x^3+10x^2-3x-6$ ، $2x^3+6x^2+5x+2$ اور $3x^3+6x^2+2x+4$ کا عاد اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ 2x^3+6x^2+5x+2 & 5x^3+10x^2-3x-6 \\ & \times 2 \\ \hline & 10x^3+20x^2-6x-12 \\ & \pm 10x^3 \pm 30x^2 \pm 25x \pm 10 \\ \hline & -10x^2-31x-22 \end{array}$$

اب $-10x^2-31x-22$ کو '-1' سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(10x^2+31x+22)$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ 10x^2+31x+22 & 2x^3+6x^2+5x+2 \\ & \times 5 \\ \hline & 10x^3+30x^2+25x+10 \\ & \pm 10x^3 \pm 31x^2 \pm 22x \\ \hline & -x^2+3x+10 \\ & \times 10 \\ \hline & -10x^2+30x+100 \\ & \mp 10x^2 \mp 31x \mp 22 \\ \hline & 61x+122 \end{array}$$

اب $61x+122$ کو 61 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(x+2)$

$$\begin{array}{r|l} & 10x+11 \\ x+2 & 10x^2+31x+22 \\ & \pm 10x^2 \pm 20x \\ \hline & 11x+22 \\ & \pm 11x \pm 22 \\ \hline & 0 \end{array}$$

اب

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+2 \\ x+2 & 3x^3+6x^2+2x+4 \\ & \pm 3x^3 \pm 6x^2 \\ \hline & 2x+4 \\ & \pm 2x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x+2$ = عادِ اعظم

مثال 3:-

اگر x^2-x-6 اور $x^2+3x-18$ کا عادِ اعظم $x-a$ ہو تو $'a'$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: صاف ظاہر ہے کہ $x-a$، عادِ اعظم ہو تو دونوں کثیر رقمیوں کو پورا پورا تقسیم کرے گا اور $x=a$ دونوں کثیر رقمیوں کو صفر بنائے گا۔

یعنی کہ $a^2-a-6=0$ اور $a^2+3a-18=0$

$$a^2-a-6=a^2+3a-18$$

$$4a=12$$

$$a=3$$

تقسیم کنندہ

کوئی کثیر رقمی $D(x)$ کسی کثیر رقمی $P(x)$ کا تقسیم کنندہ کہلاتی ہے اگر $P(x)=D(x)\,.\,Q(x)$ جبکہ $Q(x)$ کوئی اور کثیر رقمی ہے

مثلاً $D(x)=x-2$ اور $P(x)=(x-2)\,(x+3)$

تو پھر واضح ہے کہ $D(x)$، $P(x)$ کا تقسیم کنندہ ہے

کیونکہ $P(x)=(x-2)\,(x+3)$

$$=D(x)\,.\,Q(x)$$

جبکہ $Q(x)=x+3$

مشق 3.2

تقسیم کے طریقہ سے عاداعظم HCF معلوم کریں۔

1. $x^4+x^2+1\ ,\ x^4+x^3+x+1$

2. $6x^3+7x^2-9x+2\ ,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$

3. $4x^3+2x^2-6x\ ,\ 4x^3-8x+4$

4. $x^3+7x^2+12x\ ,\ x^3-2x^2-15x$

5. $x^3-x^2-x+1\ ,\ x^4-2x^3+2x-1$

6. $x^3-x^2-x-2\ ,\ x^3+3x^2-6x-8$

7. $x^2+3x-4\ ,\ x^3-2x^2-2x+3$

8. $3x^3-14x^2+9x+10\ ,\ 15x^3-34x^2+21x-10$

9. $2x^4+x^3+4x+2\ ,\ 6x^3+5x^2+x\ ,\ 2x^4+3x^3+x^2+2x+1$

10. $x^3+x^2-5x+3\ ,\ x^3-7x+6\ ,\ x^3+2x^2-2x+3$

3.1.2 ذواضعاف اقل (LCM) Least Common Multiple (LCM)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل ایک کم ترین درجہ کا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان سب جملوں سے بغیر ''باقی'' کے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

ذواضعاف اقل کا مخفف LCM ہے۔

ہم ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کر سکتے ہیں

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنا LCM BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنے کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1:- $4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں

حل:

$12p^3q^2$ کی تجزی $= 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$

$8p^2qr^3$ کی تجزی $= 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$

$4p^2q^3r$ کی تجزی $= 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$

ذواضعاف اقل = مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

$$= (2^2 \times p^2 \times q^2 \times r) \times (2 \times 3 \times p \times q \times r^2)$$

$$= 4p^2q^2r \times 6pqr^2$$

$$= 4 \times 6 \times p^2 \times p \times q^2 \times q \times r \times r^2$$

ذواضعاف اقل $= 24p^3q^3r^3$

> **یاد رکھیے:**
>
> مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے وقت مشترکہ اجزائے ضربی کو بار بار شمار نہیں کرتے۔

مثال 2:- $24ab^2c^2$ ، $6ab^2c^3$ اور $18ab^2c^3$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$18ab^2c^3$ کی تجزی $= 2 \times 3 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c \times c$

$6a^2bc^3$ کی تجزی $= 2 \times 3 \times a \times a \times b \times c \times c \times c$

$24ab^2c^2$ کی تجزی $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c$

ذواضعاف اقل = مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

$$= (2 \times 3 \times a \times b^2 \times c^3) \times (2 \times 2 \times 3 \times a)$$

$$= (6ab^2c^3) \times (12a)$$

ذواضعاف اقل $= 72a^2b^2c^3$

مثال 3:- $x^2 - 4x - 21$ اور $x^2 - 49$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$$x^2 - 49 = x^2 - 7^2$$
$$= (x-7)(x+7)$$

اور

$$x^2 - 4x - 21 = x^2 - 7x + 3x - 21$$
$$= x(x-7) + 3(x-7)$$
$$= (x-7)(x+3)$$

مشترک جزوضربی $= x - 7$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $= (x+7)(x+3)$

ذواضعاف اقل = مشترک جزوضربی × غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

ذواضعاف اقل $= (x-7) \times (x+7)(x+3)$

$$= (x^2 - 7^2)(x+3)$$
$$= (x^2 - 49)(x+3)$$

ذواضعاف اقل $= x^3 + 3x^2 - 49x - 147$

مشق 3.3

بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل LCM معلوم کیجیے۔

1. $21a^4x^3y\ ,\ 35a^2x^4y\ ,\ 28a^3xy^4$
2. $3a^4b^2c^3\ ,\ 5a^2b^3c^5$
3. $2ab\ ,\ 3ab\ ,\ 4ca$
4. $x^2yz\ ,\ xy^2z\ ,\ xyz^2$
5. $p^3q - pq^3\ ,\ p^5q^2 - p^2q^5$
6. $x^3 + 64\ ,\ x^2 - 16$
7. $x^2 - x - 2\ ,\ x^2 + x - 6\ ,\ x^2 - 3x + 2$
8. $y^2 - 9\ ,\ (y+3)^2\ ,\ y^2 + y - 6$
9. $1 - y^2\ ,\ y^3 + 1\ ,\ 1 - y - 2y^2$
10. $x^2 - y^2\ ,\ x^4 - y^4\ ,\ x^6 - y^6$
11. $x^3 + 1\ ,\ x^4 + x^2 + 1\ ,\ (x^2 + x + 1)^2$
12. $x^3 + y^3\ ,\ x^4 - y^4\ ,\ x^6 + y^6$
13. $2x^2 + 5x + 3\ ,\ x^2 + 2x + 1\ ,\ 2x^2 + 9x + 9$
14. $x^4 + x^3 - 6x^2\ ,\ x^4 - 9x^2\ ,\ x^3 + x^2 - 6x$
15. $x^2 + 4xy + 4y^2\ ,\ x^2 + 3xy + 2y^2\ ,\ x^2 + 2xy + y^2$

3.1.3 عاداعظم اور ذواضعاف اقل کا باہمی تعلق

Relationship Between HCF and LCM

A اور B کوئی سے دو الجبری جملے ہوں اور HCF اور LCM کو بالترتیب H اور L سے ظاہر کیا جائے تو ان کے درمیان تعلق کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\boxed{A \times B = H \times L}$$

یہ عاداعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان کلیہ کہلاتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا

$$\frac{A}{H} = x \quad \text{اور} \quad \frac{B}{H} = y$$

$$A = Hx \quad .... \quad (i)$$

$$B = Hy \quad .... \quad (ii)$$

چونکہ x اور y میں کوئی جزوضربی مشترک نہیں

لہٰذا

$$L = H.x.y$$

$$HL = H(H.x.y) \quad \text{(دونوں اطراف } H \text{ سے ضرب دینے سے)}$$

$$= (Hx).(Hy)$$

$$HL = A.B.$$

اہم نتائج:

$$(i) \quad L = \frac{A \times B}{H}$$

$$(ii) \quad H = \frac{A \times B}{L}$$

$$(iii) \quad A = \frac{H \times L}{B}$$

نوٹ:

اگر A اور B دو الجبری جملے ہوں تو ہم ذواضعاف اقل معلوم کرنے سے پہلے عاداعظم معلوم کرتے ہیں۔

اگر دو الجبری جملوں کا عاداعظم معلوم ہو تو ہم ان کا ذواضعاف اقل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1:-

دوالجبری جملوں کے ذواضعاف اقل اور عاداعظم بالترتیب $(2x+1)\ (x^2-1)$ اور $(2x+1)$ ہیں۔اگرایک جملہ $(2x+1)\ (x-1)$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں۔

حل:

$$L = (2x+1)\ (x^2-1)$$

$$H = 2x+1$$

$$A = (x-1)\ (2x+1)$$

$$B = ?$$

ہم جانتے ہیں کہ $A \times B = H \times L$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(2x+1)\ (x^2-1)\ (2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1)\ (x-1)(2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$B = (2x+1)(x+1)$$

مثال 2:-

اگر دو جملوں کا عاداعظم، $(x+3)$ اور ان کا ذواضعاف اقل، x^3-7x+6 ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں جبکہ پہلا جملہ (x^2+2x-3) ہے۔

حل: فرض کیا مطلوبہ جملہ B ہے۔ تو

$$A \times B = H \times L$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(x+3)\ (x^3-7x+6)}{x^2+2x-3}$$

$$= (x+3)(x-2)$$

$$B = x^2+x-6$$

$$\begin{array}{r}
x-2 \\
x^2+2x-3\ \overline{)\ x^3-7x+6} \\
-x^3 \mp 3x \quad \pm 2x^2 \\
\hline
-2x^2-4x+6 \\
\mp 2x^2 \mp 4x \pm 6 \\
\hline
0
\end{array}$$

مثال 3:-

دو جملوں کا حاصل ضرب $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$ ہے۔ اور ان کا ذواضعاف اقل $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ ہے۔ ان کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A \times B = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$

$$L = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$H = ?$$

$$L \times H = A \times B$$

$$H = \frac{A \times B}{L}$$

$$H = \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48 \\ & \underline{\pm x^4 \pm 5x^3 \mp 2x^2 \mp 24x} \\ & -2x^3 - 10x^2 + 4x + 48 \\ & \underline{\mp 2x^3 \mp 10x^2 \pm 4x \pm 48} \\ & 0 \end{array}$$

$\therefore$ عاداعظم $= x - 2$

یاد رکھیے کہ: عاداعظم × ذواضعاف اقل = دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب

ذواضعاف اقل = (دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب) / (عاداعظم)

عاداعظم = (دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب) / (ذواضعاف اقل)

مشق 3.4

درج ذیل کا عاداعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. x^3+x^2+x+1 , x^3-x^2+x-1
2. $x^3-3x^2-4x+12$, x^3-x^2-4x+4
3. $2x^3+2x^2+x+1$, $2x^3-2x^2+x-1$
4. $6x^3+7x^2-9x+2$, $8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
5. $3x^4+17x^3+27x^2+7x-6$, $6x^4+7x^3-27x^2+17x-3$
6. $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15$, $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$
7. x^4-x^3-x+1 , x^4+x^3-x-1
8. x^4+x^3+x+1 , x^4+x^3-x-1

مطلوبہ کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

9. $A = x^2-5x-14$, $H = x-7$, $L = x^3-10x^2+11x+70$, $B = ?$
10. $B = 3x^2+14x+8$, $H = 3x+2$, $L = 6x^3+25x^2+2x-8$, $A = ?$
11. دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب $x^4+6x^3-3x^2-56x-48$ ہے اور ان کا عاداعظم $x^3+2x^2-11x-12$ ہے۔ ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
12. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور L.C.M بالترتیب $x^4+5x^3-x^2-17x+12$ اور $x^3+6x^2+5x-12$ ہیں۔ ان کا H.C.F معلوم کیجیے۔
13. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور ذواضعاف اقل بالترتیب $x^4-12x^3+53x^2-102x+72$ اور $x-3$ ہیں۔ ان کا عاداعظم معلوم کیجیے۔
14. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور عاداعظم بالترتیب $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$ اور $x+2$ ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
15. ایک جملہ $x^3+3x^2-4x-12$ ہے۔ جبکہ دوسرا جملہ $x^3+5x^2-4x-20$ ہے۔ ان کا عاداعظم x^2-4 ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
16. ایک الجبری جملہ x^3-x^2+2x-2 اور دوسرا جملہ x^3-x^2-2x+2 ہے۔ ان کا عاداعظم، $x-1$ ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔
17. ثابت کیجیے کہ $H^3+L^3 = A^3+B^3$ جبکہ $H+L = A+B$ ، H اور L بالترتیب عاداعظم اور ذواضعاف اقل کو ظاہر کرتے ہیں اور A اور B بالترتیب کثیر رقمیاں ہیں۔

3.2 الجبری کسور پر بنیادی عوامل
BASIC OPERATIONS ON THE ALGEBRAIC FRACTIONS

3.2.1 الجبری جملوں کی جمع اور تفریق
Addition and Subtraction of the Algebraic Fractions

الجبری جملوں کی جمع اور تفریق کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

حل:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

$$=\frac{x^2+2x+x+2}{x^2-4x+2x-8}+\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-4x-3x+12}-\frac{x^2+3x-2x-6}{x^2-4x-2x+8}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-4)(x+2)}+\frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-3)}-\frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$$

$$=\frac{x+1}{x-4}+\frac{x-2}{x-4}-\frac{x+3}{x-4}$$

$$=\frac{x+1+x-2-x-3}{x-4}$$

$$=\frac{x-4}{x-4}=1$$

یاد رکھیے:

(i) الجبری کسور میں نسب نما اور مخرج، کثیر رقمیاں ہوتی ہیں۔

(ii) جب ہم ان کسور کو جمع یا تفریق کرتے ہیں تو پہلے ہم انہیں مختصر ترین شکل میں تبدیل کر لیتے ہیں

مثال 2:- مختصر کریں

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

حل:-

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)+1(a^2+ab+b^2)-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{a^2-b^2+a^2+ab+b^2-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{2a^2}{a^3-b^3}$$

3.2.2 الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم

Multiplication and Division of the Algebraic Fractions

اگر P, Q, R, S الجبری جملے ہوں تو $\frac{P}{Q}$ اور $\frac{R}{S}$ الجبری کسور کہلاتی ہیں جبکہ $Q \neq 0$ ، $S \neq 0$ ۔

الجبری کسور کی ضرب

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS}$$ جبکہ $Q \neq 0$, $S \neq 0$.

الجبری کسور کی تقسیم

$$\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}$$

$$=\frac{PS}{QR}$$ جبکہ $Q \neq 0$, $S \neq 0$.

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac} \times \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

حل:

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac} \times \frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

$$= \frac{b^2-(c^2+a^2-2ac)}{(c^2+a^2+2ac)-b^2} \times \frac{(b^2+c^2-2bc)-a^2}{(a^2+c^2-2ac)-b^2}$$

$$= \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2} \times \frac{(b-c)^2-a^2}{(a-c)^2-b^2}$$

$$= \frac{\left[b^2-(a-c)^2\right]}{(a+c-b)(a+c+b)} \times \frac{(b-c-a)(b-c+a)}{(-1)\left[b^2-(a-c)^2\right]}$$

$$= \frac{-(b-c-a)(b-c+a)}{(a+c-b)(a+b+c)}$$

$$= \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+c-b)(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

حل:

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \times \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)} \times \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{1}{a+b}$$

مشق 3.5

مختصر کیجیے۔

1. $\frac{1}{a}+\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a+2}$

2. $\frac{2a}{(x-2a)}-\frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2}+\frac{2}{x-3a}$

3. $\frac{1}{a^2+1}-\frac{a^4}{a^2+1}+\frac{a^6}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}$

4. $\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2x+1}{x^4+x^2+1}$

5. $\frac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}-\frac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$

6. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

7. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

8. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\frac{x-y}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{x}$

9. $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\times\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}\div\frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

10. $\frac{a^3+64b^3}{a^2+20ab+64b^2}\div\frac{a^2-4ab+16b^2}{a^2+4ab+16b^2}\times\frac{a^2+12ab-64b^2}{a^3-64b^3}$

11. $\frac{a}{(a+b)^2-2ab}\times\frac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)}\div\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab}$

12. $\frac{a^2-1}{a^2-a-2}\div\frac{a^2+5a+6}{a^2-5a+6}\div\frac{a^2-4a+3}{a^2+4a+3}$

3.3 الجبری جملوں کا جذر SQUARE ROOT OF ALGEBRAIC EXPRESSION

ہم الجبری جملوں کا جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے

(ii) تقسیم کے طریقہ سے

3.3.1 تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کرنا Square Root By Factorization Method

ہم اس طریقہ میں جملے کو مکمل مربع کی صورت میں ظاہر کر کے جذر معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

یا $$x^2 \pm 2xy + y^2 = [\pm(x \pm y)]^2$$

یا $$\sqrt{x^2 \pm 2xy + y^2} = \pm(x \pm y)$$

پس الجبری جملے کا جذر دو ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ جو ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

$49x^2 + 112xy + 64y^2$ کا تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کیجیے۔

حل: $49x^2 + 112xy + 64y^2$

$$= (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x + 8y)^2$$

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 = [\pm(7x + 8y)]^2$$

دونوں طرف جذر المربع سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{49x^2 + 112xy + 64y^2} = \pm(7x + 8y)$$

مثال 2:-

$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27$ کا جذر معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ $x + \frac{1}{x} = z,$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(x + \frac{1}{x})^2 = z^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = z^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

$$\therefore (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = z^2 - 2 + 10z + 27$$

$$= z^2 + 10z + 25$$

$$= (z)^2 + 2(z)5 + (5)^2$$

$$= (z + 5)^2$$ [$z = x + \frac{1}{x}$ رکھنے سے]

$$= (x + \frac{1}{x} + 5)^2$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27 = \left[\pm(x + \frac{1}{x} + 5)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 10(x + \frac{1}{x}) + 27} = \pm(x + \frac{1}{x} + 5)$$

مثال 3:-

$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$$

$$= [x(x-3)]\,[(x-1)(x-2)]+1$$

$$= \left[x^2-3x\right]\left[x^2-3x+2\right]+1$$

$x^2-3x = z$ رکھنے سے

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = z(z+2)+1$$

$$= z^2+2z+1$$

$$= (z+1)^2$$

اب رکھیے $z = x^2-3x$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = (x^2-3x+1)^2$$

$$= \left[\pm(x^2-3x+1)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)+1} = \pm(x^2-3x+1)$$

مثال 4:-

$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}),(x\neq o\ ,\ y\neq o)$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=z$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^2=z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2=z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=z^2+2$$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})=(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2)-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})$$

$$=z^2+2+2-4z$$

$$=z^2-4z+4$$

$$=(z-2)^2$$

$$=\left[\pm(z-2)\right]^2$$

$\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right.$ رکھنے سے $\left.\right]$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})=\left[\pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})}=\pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)$$

3.3.2 جذر بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کرنا Square Root by Division Method

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے بذریعہ طریقہ تقسیم جذر معلوم کرنے کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1:-

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + y + z \\
\hline
x & x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \pm x^2 \\
\hline
2x + y & 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \pm 2xy \qquad \pm y^2 \\
\hline
2x + 2y + z & 2xz + 2yz + z^2 \\
 & \pm 2xz \pm 2yz \pm z^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

مطلوبہ جذر المربع $\pm (x + y + z)$

(i) دیئے گئے جملے کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔
پہلی رقم x^2 کا جذر المربع x لیجیے۔
جملے میں تفریق کرنے کے بعد $2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2$ باقی بچتا ہے۔

(ii) حاصل قسمت x کو اس کے دوگنا $2x$ کو y سے ضرب دیجئے جو کہ باقی بچے کی پہلی رقم $2xy$ ہے۔
لہٰذا باقی بچے کو $2x + y$ سے تقسیم کیجیے تو ہمیں $2xz + 2yz + z^2$ نیا باقی بچتا ہے اور
$x + y$ حاصل قسمت ہوتے ہیں۔ جو کہ جذر المربع کی پہلی دو رقوم ہیں۔

(iii) باقی بچے ہوئے کو حاصل قسمت کے دوگنا + z سے تقسیم کیجیے۔ یعنی $2x + 2y + z$ تو حاصل قسمت
$x + y + z$ حل ہوا اور باقی صفر بچا۔ پس $\pm (x + y + z)$ مطلوبہ جذر ہے۔

مثال 2:-

$(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 - 12(x^2 - \frac{1}{x^2}) + 36$$

$$= x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 - 12x^2 + \frac{12}{x^2} + 36$$

$$= x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$ (ترتیب نزولی میں لکھنے سے)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 6 - \frac{1}{x^2} \\ \hline x^2 & x^4 - 12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\ & \underline{\pm x^4} \\ 2x^2 - 6 & -12x^2 + 34 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\ & \underline{\pm 12x^2 \pm 36} \\ 2x^2 - 12 - \frac{1}{x^2} & -2 + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\ & \underline{\mp 2 \pm \frac{12}{x^2} \pm \frac{1}{x^4}} \\ & 0 \end{array}$$

پس $\pm(x^2 - 6 - \frac{1}{x^2})$ مطلوبہ جذر ہے۔

$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$ اور $x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a$

مثال 3:- $x^4-12x^3+217x+320$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

(i) کیا جمع کیا جائے؟ (ii) کیا تفریق کیا جائے؟

(iii) x کی کس قیمت کے لیے مکمل مربع ہوگی؟

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-6x-18 \\
\hline
x^2 & x^4-12x^3+0x^2+217x+320 \\
 & \pm x^4 \\
\hline
2x^2-6x & -12x^3+0x^2+217x+320 \\
 & \pm 12x^3 \pm 36x^2 \\
\hline
2x^2-12x-18 & -36x^2+217x+320 \\
 & \mp 36x^2 \pm 216x \pm 324 \\
\hline
 & x-4
\end{array}
$$

(i) $-x+4$ جمع کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔

(ii) $x-4$ تفریق کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔

(iii) اگر $x-4=0$ یعنی $x=4$ ہو تو جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مثال 4:-

'ℓ' اور 'm' کی کس قیمت کے لیے جملہ $4x^4-12x^3+25x^2-\ell x+m$ ایک مکمل مربع ہوگا؟ جبکہ $x\neq 0$

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-3x+4 \\
\hline
2x^2 & 4x^4-12x^3+25x^2-\ell x+m \\
 & \pm 4x^4 \\
\hline
4x^2-3x & -12x^3+25x^2 \\
 & \mp 12x^3 \pm 9x^2 \\
\hline
4x^2-6x+4 & 16x^2-\ell x+m \\
 & \pm 16x^2 \mp 24x \pm 16 \\
\hline
 & (-\ell+24)x+(m-16)
\end{array}
$$

باقی بچا $(-\ell+24)x+(m-16)$

دیا گیا جملہ مکمل مربع ہوگا اگر باقی بچا $(-\ell + 24)x + (m - 16)$ کی قیمت صفر کے برابر ہو۔
ایسا ممکن ہوگا اگر

$$-\ell + 24 = 0 \quad \text{اور} \quad m - 16 = 0$$

$$\ell = 24 \quad \text{اور} \quad m = 16$$

لہٰذا $\ell = 24$ اور $m = 16$ کے لیے دیا گیا جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مشق 3.6

درج ذیل کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

1. $16x^2 + 24xy + 9y^2$
2. $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 9x + 20)(x^2 - 8x + 15)$
3. $(x^2 + 8x + 7)(2x^2 - x - 3)(2x^2 + 11x - 21)$
4. $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 16$
5. $(2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7) + 16$
6. $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 27, x \neq 0$
7. $(t - \frac{1}{t})^2 - 4(t + \frac{1}{t}) + 8, (t \neq 0)$
8. $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 4(x + \frac{1}{x})^2 + 12, x \neq 0$
9. $4x^4 + 12x^3 + 25x^2 + 24x + 16$
10. $\frac{9x^2}{4y^2} - \frac{3x}{2y} - \frac{7}{4} + \frac{2y}{3x} + \frac{4x^2}{9y^2}, (x \neq 0, y \neq 0)$
11. 'x' کی کس قیمت کے لیے $x^4 + 4x^2 + x + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^4}$ ایک مکمل مربع ہے۔ جبکہ $x \neq o$
12. اگر $x^4 + \ell x^3 + mx^2 + 12x + 9$ ایک مکمل مربع ہو تو ℓ اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

جائزہ مشق-3

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیں۔

1. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذو اضعاف اقل}} = ?$

(a) عاد اعظم (b) ذو اضعاف اقل
(c) ذو اضعاف اقل × عاد اعظم (d) عاد اعظم + ذو اضعاف اقل

2. ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. عاد اعظم معلوم کرنے کے طریقوں کی تعداد ہے۔

(a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. $12pq,\ 8p^2q$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $4pq$ (b) $4p^2q^2$ (c) $4pq^2$ (d) $4p^2q$

5. $2x^2+3x+1,\ \ 2x^2-x-1$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $2x-1$ (b) $2x+1$ (c) $x+1$ (d) $x-1$

6. $6pqr,\ 15qrs$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $3qr$ (b) $3pqr$ (c) $3pqrs$ (d) $15pqrs$

7. $12p^3q^2,\ 8p^2$ کا ذو اضعاف اقل ہے۔

(a) $24pq^2$ (b) $24p^3q$ (c) $24p^3q^2$ (d) $12p^2q$

8. دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب =

(a) عاد اعظم (b) ذو اضعاف اقل
(c) ذو اضعاف اقل × عاد اعظم (d) ذو اضعاف اقل + عاد اعظم

9. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{H.C.F} =$

(a) ذو اضعاف اقل (b) عاد اعظم
(c) 0 (d) عاد اعظم × ذو اضعاف اقل

10. $\dfrac{L.C.M \times H.C.F}{\text{پہلا جملہ}} =$

(a) دوسرا جملہ (b) 1 (c) عاد اعظم (d) ذو اضعاف اقل

II- خالی جگہ پر کریں۔

1. عاداعظم معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ______________

2. ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ______________

3. دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب = ______________ × ذواضعاف اقل

4. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$ = ______________

5. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{عاداعظم}}$ = ______________

6. $\dfrac{\text{عاداعظم} \times \text{ذواضعاف اقل}}{\text{پہلا جملہ}}$ = ______________

7. $2x^2 + 3x + 1,\ 4x^2 - 1$ کا عاداعظم ہے ______________

8. $x^3 + 8,\ x^2 - 4$ کا عاداعظم ہے ______________

9. $2x^3y^3,\ 4x^2y^4$ کا عاداعظم ہے ______________

10. $3x^2y^2,\ 2xyz$ کا ذواضعاف اقل ہے ______________

خلاصہ

عاداعظم:

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم زیادہ سے زیادہ درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو اِن تمام جملوں کو تقسیم کرتا ہے۔

ذواضعاف اقل:

دو یا دو الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل کم سے کم درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر "باقی بچا" کے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔