یونٹ

9

رقبہ اور حجم AREAS AND VOLUMES

- مسئلہ فیثا غورث
- رقبہ
- حجم

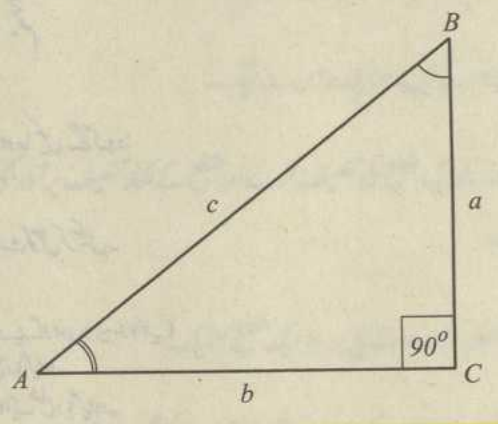
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مسئلہ فیثا غورث بیان کر سکیں۔
- مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے قائمہ زاویہ مثلث کو حل کر سکیں۔
- رقبہ معلوم کر سکیں کہ:
  - ایک مثلث کا جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں (ہیروز کا کلیہ)
  - ایک مثلث کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
  - ایک مساوی الاضلاع مثلث کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
  - ایک مستطیل کا جب کہ اس کے دو متصلہ اضلاع دیے گئے ہوں۔
  - ایک متوازی الاضلاع کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
  - ایک مربع کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
  - کمرہ کی چار دیواروں کا جب کہ ان کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
- ایک مربعی/مستطیلی میدان پر فرش لگانے کا خرچ معلوم کر سکیں۔
- ایک مستطیل پلاٹ کے باہر فٹ پاتھ پر دی گئی سمتوں کے حساب سے ٹائلوں کی تعداد معلوم کر سکیں۔
- دائرہ اور نصف دائرہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ اس کا رداس دیا گیا ہو۔
  - دو ہم مرکز دائروں کے درمیانی علاقہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ ان کے رداس دیے گئے ہوں۔
- مثلث، مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور دائرہ کے رقبہ سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- حجم معلوم کر سکیں۔
  - ایک مکعب کا جب کہ اس کا ایک کنارا دیا گیا ہو۔
  - ایک مکعب نما کا جب کہ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
  - ایک سیدھے دائروی سلنڈر کا جس کے قاعدہ کا رداس اور اونچائی دی گئی ہو۔
  - ایک سیدھی کون (Cone) کا جس کا رداس اور اونچائی معلوم ہو۔
  - ایک کرہ اور نصف کرہ کا جس کا رداس دیا گیا ہو۔
- مکعب، مکعب نما، سلنڈر، کون اور کرہ کے حجم سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

9.1 مسئلہ فیثا غورث PYTHAGORAS THEOREM

قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع، اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2$$

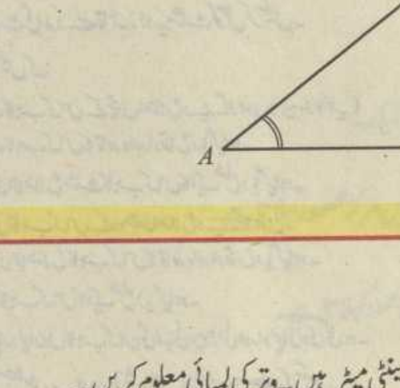


مثال 1:-

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہیں۔ وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: چونکہ $a = 5$ سینٹی میٹر , $b = 12$ سینٹی میٹر

فرض کیا کہ وتر کی لمبائی c ہے۔ تو مسئلہ فیثا غورث کی رو سے



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= (5)^2 + (12)^2$$

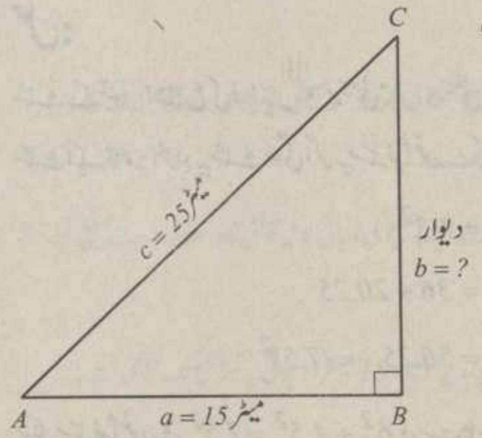
$$= 25 + 144 = 169$$

$c = 13$ سینٹی میٹر

مثال 2:-

ایک سیڑھی جس کی لمبائی 25 میٹر ہے کو دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا پایہ دیوار سے 15 میٹر کے فاصلہ پر ہے۔ بتایئے سیڑھی دیوار کے ساتھ کتنی بلندی تک جاتی ہے؟

حل: چونکہ $a = 15$ میٹر، $c = 25$ میٹر



فرض کیا کہ مطلوبہ اونچائی b ہو تو

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$= (25)^2 - (15)^2$$

$$= 625 - 225$$

$$= 400$$

$$b = 20 \text{ میٹر}$$

مثال 3:-

اگر کسی مثلث کے اضلاع 30، 72 اور 78 ہوں تو کیا یہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

حل: چونکہ $a = 30,\ b = 72,\ c = 78$

تو مسئلہ فیثاغورث کی رو سے $c^2 = a^2 + b^2$

$$R.H.S = a^2 + b^2 = (30)^2 + (72)^2$$

$$= 900 + 5184$$

$$= 6084$$

$$L.H.S = c^2 = (78)^2$$

$$= 6084$$

$$R.H.S = L.H.S$$

پس مثلث ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال 4:-

اگر مثلث کے لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر ہوں تو کیا یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگی؟ اگر ایسا ہے تو اس میں وتر کونسا ضلع ہوگا؟

حل:

مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر دی گئی ہیں۔
مثلث ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگی اگر یہ مسئلہ فیثا غورث کی شرط پر پوری اترے۔

$$6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$$

$$(6)^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25$$

$$= 56.25 \quad = (7.5)^2$$

چونکہ مسئلہ فیثا غورث $6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$ درست ثابت ہوگیا ہے۔ لہٰذا یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

اور $7.5^2 = 6^2 + 4.5^2$

$\therefore$ پس 7.5 سینٹی میٹر لمبائی والا ضلع وتر ہے۔

مشق 9.1

1- قائمۃ الزاویہ مثلث کا تیسرا ضلع معلوم کریں جبکہ a, b اس کے دو اضلاع اور c وتر ہو۔

(i) $a = 3, \quad b = 4, \quad c = ?$

(ii) $a = 5, \quad c = 13, \quad b = ?$

(iii) $b = 5, \quad c = 61, \quad a = ?$

2- اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع $2ab$ اور $a^2 - b^2$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ وتر کی لمبائی $a^2 + b^2$ ہے۔

3- اس متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی 'l' ہو۔

4- اُس متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ کے وتر کی لمبائی معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہو۔

5- اگر درج ذیل دیے گئے نمبر مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوں تو ان میں سے کون سی قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

(i) 3, 4, 5
(ii) 9, 17, 25
(iii) 11, 61, 60

6- مثلث ABC میں C قائمہ زاویہ ہے۔ اگر $m\overline{AC} = 9$ سینٹی میٹر اور $m\overline{BC} = 12$ سینٹی میٹر ہو تو AB کی مقدار معلوم کریں، مسئلہ فیثاغورث استعمال کرتے ہوئے۔

7- قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر 25 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کے ایک ضلع کی لمبائی 24 سینٹی میٹر ہو تو دوسرے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

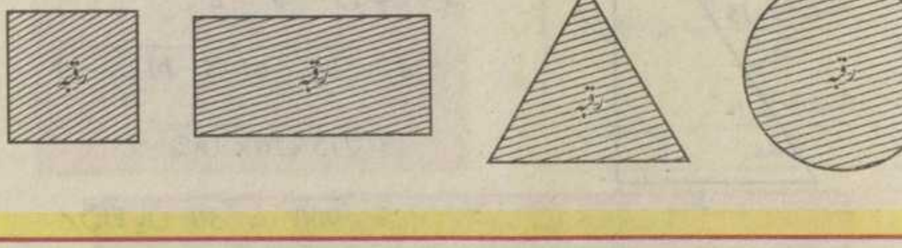
8- 17 میٹر سیڑھی کو مکان کی دیوار سے لگایا جائے تو یہ دیوار پر موجود 15 میٹر اونچائی پر کھڑکی تک پہنچتی ہے۔ اس کا پایہ دیوار سے کتنا دور ہے؟

9- ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع برابر ہیں۔ اگر اس کے وتر کے مربع کی مقدار 50 ہو تو ہر ایک ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

10- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 36 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 39 سینٹی میٹر ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

9.2 رقبہ AREAS

کسی بند شکل کی چاردیواری میں گھری ہوئی جگہ اس کا رقبہ کہلاتی ہے۔



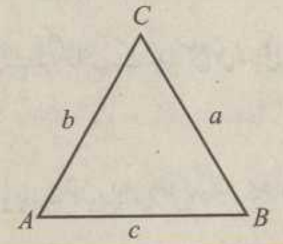
9.2.1 مثلث کا رقبہ The Area of a Triangle

مثلث کا رقبہ جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں۔

مثلث ABC جس کے اضلاع کی لمبائیاں a, b, c ہیں اور

$$2S = a+b+c \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a+b+c}{2},$$

جبکہ 'S' مثلث کے احاطہ کا نصف ہے۔



کسی عام مثلث کا رقبہ $A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)}$ ہوتا ہے۔

یہ مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیروز فارمولا کہلاتا ہے۔

مثال:- مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 5، 12 اور 13 ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: کیونکہ $a = 5, b = 12, c = 13$

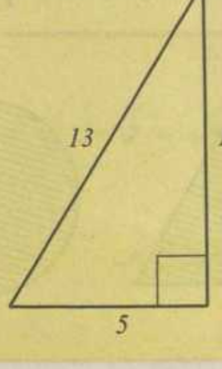
تو $2S = a+b+c$

$$2S = 5+12+13 = 30 \quad \Rightarrow \quad S = 15$$

$$S-a = 15-5 = 10,$$

$$S-b = 15-12 = 3,$$

$$S-c = 15-13 = 2$$



$$A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)}$$

$$= \sqrt{15\times 10\times 3\times 2}$$

$$= \sqrt{900} = 30$$ مربع اکائیاں

نوٹ: اس سوال میں مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس کا قاعدہ 5 عمود 12 اور وتر 13 ہے۔

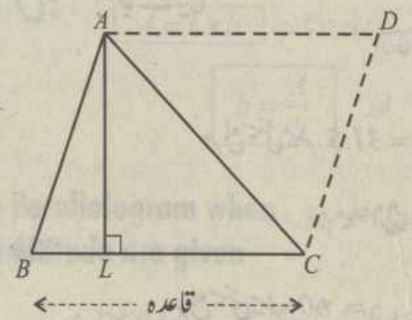
پس $\text{رقبہ} = \frac{1}{2}\ (\text{قاعدہ}) \times (\text{عمود})$

$A = \frac{1}{2}\ (5)\ (12) = \frac{60}{2} = 30$ مربع اکائیاں

نوٹ: مثلث کے رقبہ کو A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

Area of a Triangle when base and Altitude are given

مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور عمودی بلندی معلوم ہو۔



شکل کے مطابق کوئی مثلث ABC بنایئے۔
فرض کیا $\overline{BC}$ اس کا قاعدہ ہے اور $\overline{AL} \perp \overline{BC}$
لہٰذا $\overline{AL}$ اس کے مطابق عمودی بلندی ہے۔
A اور C سے بالترتیب $\overline{BC}$ اور $\overline{BA}$ کے متوازی خطوط کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ D پر ملتے ہیں۔
لہٰذا $ABCD$ واضح طور پر ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا قاعدہ $\overline{BC}$ اور اس کے مطابق $\overline{AL}$ عمودی بلندی ہے۔

ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع $ABCD$ کا رقبہ)

$= \frac{1}{2}(b \times h)$ جبکہ b قاعدہ اور h عمودی بلندی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ Δ کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ عمود

اہم بات

مثلث کا ارتفاع اس کی عمودی بلندی کو کہتے ہیں۔
جسے علامت h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\text{قاعدہ} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{ارتفاع}}$

$\text{ارتفاع} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{قاعدہ}}$

قاعدہ کی علامت b اور ارتفاع کی علامت h ہے۔

مثال 1:- مثلث کا ارتفاع معلوم کریں جس کا قاعدہ 16 سینٹی میٹر اور رقبہ 34 مربع سینٹی میٹر ہے۔

نوٹ
قائمۃ الزاویہ مثلث میں
قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع
اس کا وتر کہلاتا ہے

حل:

$$\text{مثلث کا ارتفاع} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{قاعدہ}}$$

رقبہ = 34 مربع سینٹی میٹر، قاعدہ = 16 سینٹی میٹر

$$\text{ارتفاع} = \frac{2 \times \text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \left(\frac{2 \times 34}{16}\right) = 4.25 \text{ سینٹی میٹر}$$

مثال 2:- مثلثان کے رقبے معلوم کریں جن کا

(i) ارتفاع = 3.5 سینٹی میٹر ، قاعدہ = 18 سینٹی میٹر

(ii) ارتفاع = 15 سینٹی میٹر ، قاعدہ = 8 سینٹی میٹر

حل: ہم جانتے ہیں

(i) $$\text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

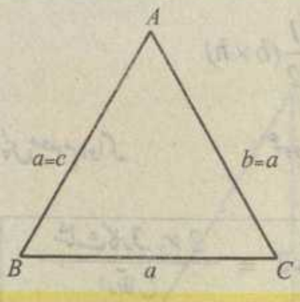
$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 3.5 = 31.5 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

(ii) $$\text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

Area of an Equilateral Triangle when its side is given

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جس کے ضلع کی لمبائی معلوم ہو۔



مساوی الاضلاع مثلث ABC میں $a = b = c$

لہٰذا $$S = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$S-a = \frac{a}{2},\ S-b = \frac{a}{2},$$

$$S-c = \frac{a}{2}$$

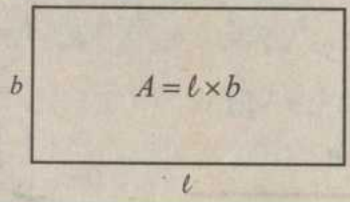
$$\Delta = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}\ a^2}{4}$$

مساوی الاضلاع مثلث، ABC کا رقبہ $\frac{\sqrt{3}\ a^2}{4}$ ہوتا ہے

Area Of A Rectangle When Its Two Sides Are Given

مستطیل کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ دو اضلاع معلوم ہوں

شکل میں دی گئی مستطیل کو لیجیے۔



مستطیل کی لمبائی $= l$

مستطیل کی چوڑائی $= b$

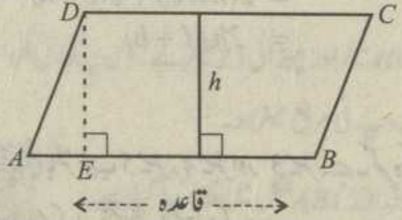
مستطیل کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے $\boxed{A = l \times b}$

پس $\boxed{l = \dfrac{A}{b}}$ اور $\boxed{b = \dfrac{A}{l}}$

Area of a Parallelogram when base and Altitude are given

متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہو

متوازی الاضلاع کا رقبہ، اس کے قاعدہ اور قاعدہ پر گرائے گئے ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔



ارتفاع × قاعدہ $= A = ABCD$ متوازی الاضلاع کا رقبہ

$\boxed{A = b \times h}$

$\boxed{\text{قاعدہ} = b = \dfrac{A}{h}}$

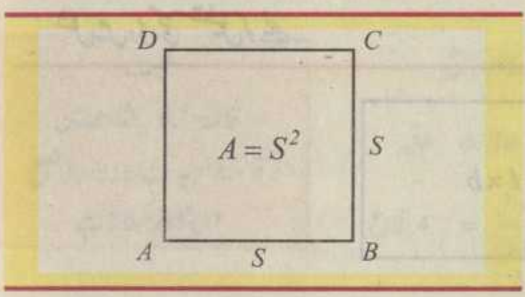
$\boxed{\text{ارتفاع} = h = \dfrac{A}{b}}$

اہم بات

مثلث کا رقبہ

ارتفاع × قاعدہ × $A = \dfrac{1}{2}$

مربع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا ضلع معلوم ہو: Area of a Square when its side is given



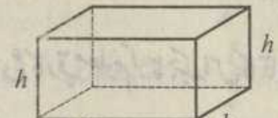
مربع ABCD کا رقبہ اس کے ضلع پر مربع کے برابر ہوتا ہے۔

$$A = \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$
$$= S \times S = S^2$$
$$\boxed{A = S^2}$$
$$\text{ضلع} = S = \sqrt{A}$$

رقبہ کی پیمائش کی اکائیاں مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر اور مربع کلومیٹر ہیں۔

کمرہ کی چار دیواروں کا رقبہ Area of Four Walls of a Room

ہم کمرہ کی چار دیواروں کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں جب کہ اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی معلوم ہو۔



فرض کیا $\ell =$ کمرہ کی لمبائی

$b =$ کمرہ کی چوڑائی

$h =$ کمرہ کی اونچائی

چار دیواروں کا رقبہ $= h \times \ell + b \times h + h \times \ell + b \times h$

$= 2(h \times \ell) + 2(b \times h) = 2(h \times \ell + b \times h)$

$= 2h(\ell + b)$

مثال:-

کمرہ کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 5 میٹر، 4 میٹر اور 3 میٹر ہے۔ کمرہ کی دیواروں پر 7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کریں۔

حل: چونکہ $h = 3$ میٹر، $b = 4$ میٹر، $\ell = 5$ میٹر

چار دیواروں کا رقبہ $= 2(\ell + b) \times h = 2(5 + 4) \times 3$

پس $= 18 \times 3 = 54$ مربع میٹر

7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ

$= 7.5 \times 54 = 405$ روپے

یادرکھنے کی باتیں:

1- مستطیل کا رقبہ = (لمبائی × چوڑائی)

2- مستطیل کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{(\text{لمبائی})^2 + (\text{چوڑائی})^2}$

3- مستطیل کا احاطہ = $2($ لمبائی + چوڑائی $)$

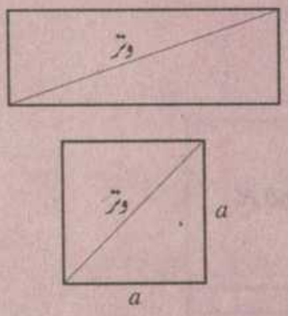
4- مربع کا رقبہ = a^2

جبکہ مربع کا ضلع = a

5- مربع کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{2}a$

6- مربع کا رقبہ = $\frac{1}{2}(\text{وتر})^2$

7- مربع کا احاطہ = ضلع × 4

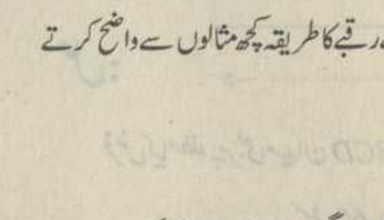


9.2.2 مستطیلی اور مربعی علاقوں کا رقبہ Areas of Rectangular and Square Fields

اندر یا باہر ہمارے اردگرد عموماً مستطیلی راستے یا میدان ہوتے ہیں۔ ہم اِن کے رقبے کا طریقہ کچھ مثالوں سے واضح کرتے ہیں۔

مثال 1:-

ایک مستطیلی علاقے کی لمبائی 40 میٹر اور چوڑائی 25 میٹر ہے۔ اس پر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں، اگر گھاس لگوانے کا خرچ 16 روپے فی مربع میٹر ہو۔



حل: فرض کیا دیا گیا علاقہ $ABCD$ شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

مستطیلی علاقے کی لمبائی = 40 میٹر

مستطیلی علاقے کی چوڑائی = 25 میٹر

مستطیلی علاقے کا رقبہ = $A = l \times b$

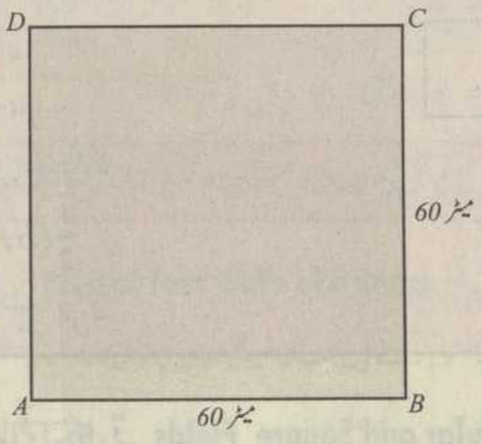
$= 40 \times 25 = 1000$ مربع میٹر

گھاس لگوانے کا خرچ = 16 روپے فی مربع میٹر

کُل خرچ = $16 \times 1000 = 16000$ روپے

مثال 2:-

مربعی میدان جس کے ہر ضلع کی لمبائی 60 میٹر ہے۔ اس میدان کا رقبہ معلوم کیجیے اور اس پر 5 روپے فی مربع میٹر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں۔



حل:

فرض کیا مطلوبہ مربعی میدان $ABCD$ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

مربعی علاقہ کے ضلع کی لمبائی = 60 میٹر

مربع کا رقبہ = A = ضلع × ضلع

$= 60 \times 60$

= 3600 مربع میٹر

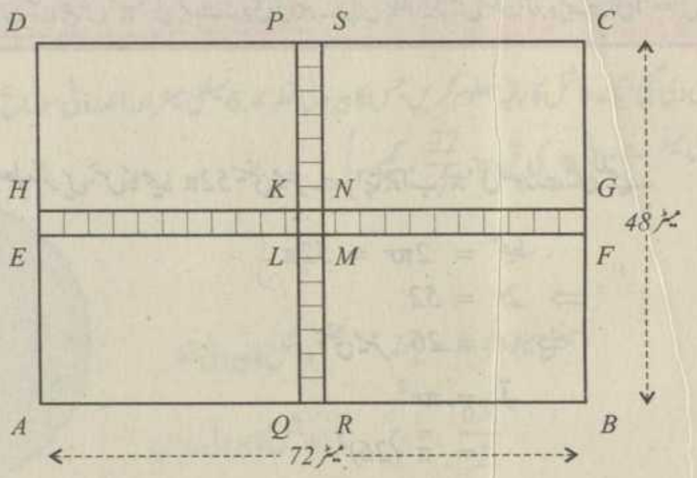
مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا ریٹ = 5 روپے فی مربع میٹر

∴ مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا خرچ $= 3600 \times 5$

= 18000 روپے

مثال 3:-

ایک پارک جس کی لمبائی 72 میٹر اور چوڑائی 48 میٹر ہے۔ جس کے وسط میں 2 میٹر چوڑی دو سڑکیں ایک دوسرے پر عموداً اور پارک کے اضلاع کے متوازی گزرتی ہیں۔ ان سڑکوں کا رقبہ معلوم کریں اور ان راستوں کو خوبصورت بنانے کے لیے 4 مربع میٹر رقبہ کی کتنی ٹائلیں درکار ہوں گی؟



حل:

شکل میں $ABCD$ مستطیلی علاقہ پارک کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ مستطیل $PQRS$ اور مستطیل $EFGH$ سڑکوں کو ظاہر کرتی ہے۔

سڑکوں کا رقبہ = $PQRS$ کا رقبہ + $EFGH$ کا رقبہ − $KLMN$ کا رقبہ

= $[(48 \times 2) + (72 \times 2) - (2 \times 2)]$ مربع میٹر

= $(96 + 144 - 4)$ مربع میٹر

= 236 مربع میٹر

پس ٹائیلوں کی تعداد = $\frac{236}{4} = 59$ ٹائلیں

9.2.4 دائرے کا رقبہ Area of a Circle

دائرے کا محیط $= 2\pi r$

جبکہ دائرے کا رداس 'r' ہے۔

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

نوٹ:
مثالوں اور مشقوں میں جہاں 'π' کی قیمت نہ دی گئی ہو۔ وہاں کیلکو لیٹر میں سٹور شدہ قیمت ہی استعمال کریں۔

مثال:-

اس دائرہ کا رقبہ معلوم کریں جس کا محیط 52π سینٹی میٹر ہے۔ اپنا جواب 'π' کی صورت میں لکھیے۔

حل:

محیط $= 2\pi r = 52\pi$

$\Rightarrow 2r = 52$

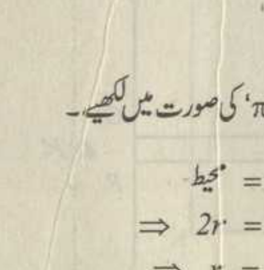
$\Rightarrow r = 26$ سینٹی میٹر

رقبہ $= \pi r^2$

$= \pi (26)^2$

$= 676\pi$ مربع سینٹی میٹر

نصف دائرہ کا رقبہ Area of a Semicircle



نصف دائرہ، دائرہ کا آدھا یا نصف ہوتا ہے۔
جو کہ قطر اور دائرہ کے آدھے محیط پر مشتمل ہوتا ہے۔
دائرہ کا سیکٹر جس کا مرکزی زاویہ 180° ہو،
بھی نصف دائرہ کہلاتا ہے۔

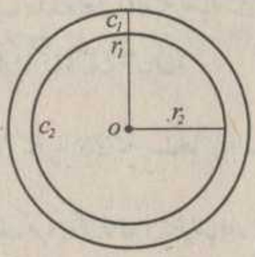
شکل میں

قوس کی لمبائی $PQ = \frac{1}{2}$ محیط

سیکٹر کا رقبہ $PRQ = \frac{1}{2}$ (دائرہ کا رقبہ)

نصف دائرہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}(\pi r^2)$

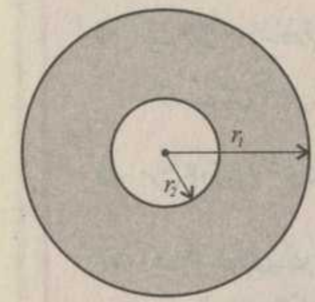
9.2.5 ہم مرکز دائروں کے رقبے Area of Concentric Circles



دائرے جن کے رداس مختلف لیکن مرکز ایک ہی نقطہ ہو، ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔ شکل میں c_1، c_2 دو ہم مرکز دائرے جن کا مرکز O ہے اور رداس مختلف r_1 اور r_2 ہیں۔

مثال:-

شکل میں دی گئی ایک واشل کا رقبہ معلوم کریں جس کا بیرونی قطر 6.4 سینٹی میٹر اور اندرونی سوراخ کا قطر 3.6 سینٹی میٹر ہے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ رکھیے۔)



حل:

واشل کا بیرونی قطر $2r_1 = 6.4$ سینٹی میٹر

واشل کا بیرونی رداس $r_1 = \frac{6.4}{2}$

$r_1 = 3.2$ سینٹی میٹر

واشل کے اندرونی سوراخ کا رداس $= r_2 = \frac{3.6}{2} = 1.8$ سینٹی میٹر

واشل کا رقبہ $= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi(3.2)^2$ مربع سینٹی میٹر $- \pi(1.8)^2$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi\left[(3.2)^2 - (1.8)^2\right]$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi(10.24 - 3.24)$ مربع سینٹی میٹر

$= (\pi \times 7)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{22}{7} \times 7 = 22$ مربع سینٹی میٹر

مشق 9.2

1- ایک برآمدہ جو کہ 40 میٹر لمبا اور 15 میٹر چوڑا ہے اس کے فرش پر 5 میٹر × 6 میٹر کے سائز میں پتھر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟

2- 18 میٹر × 28 میٹر کے گھاس والے پلاٹ کے گرد 1 میٹر چوڑے راستے پر 40 مربع سینٹی میٹر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟

3- ایک کمرہ جو کہ 5.49 میٹر لمبا اور 3.87 میٹر چوڑا ہے کا رقبہ معلوم کریں۔ اس کمرہ میں بحساب 10.50 روپے فی مربع میٹر قالین بچھانے کا کتنا خرچ آئے گا؟

4- ایک چاول کے کھیت کا رقبہ 2.5 ہیکٹر ہے۔ جبکہ اس کے اضلاع میں 3:2 کی نسبت ہے کھیت کا احاطہ معلوم کریں۔

5- ایک مربع گراؤنڈ کا رقبہ 4500 مربع میٹر ہے۔ ایک آدمی کو 3 کلو میٹر فی گھنٹا کی رفتار سے اس کے وتر کے راستے گزرنے میں کتنی دیر لگے گی؟

6- مربع کا وتر 14 سینٹی میٹر لمبا ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

7- ایک مثلث جس کے اضلاع دیے گئے ہیں، اس کا رقبہ معلوم کریں۔

(i) 120 سینٹی میٹر، 150 سینٹی میٹر اور 200 سینٹی میٹر

(ii) 50 ڈیسی میٹر، 78 ڈیسی میٹر اور 112 ڈیسی میٹر

8- ایک مثلثی علاقے کا احاطہ 540 میٹر ہے اور اس کے اضلاع میں 25:17:12 کی نسبت ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

اشارہ: فرض کیا اضلاع $25x,\ 17x,\ 12x$ ہوں تو

$$25x + 17x + 12x = 540 \Rightarrow 54x = 540 \Rightarrow x = 10$$

لہٰذا اضلاع کی مقداریں 120 میٹر، 170 میٹر اور 250 میٹر

9- ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو متصلہ اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہیں اور اس کے وتر کی لمبائی 18 سینٹی میٹر ہے۔

اشارے: فرض کیا $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں $m\overline{AB} = 12$ سینٹی میٹر، $m\overline{BC} = 14$ سینٹی میٹر اور $m\overline{AC} = 18$ سینٹی میٹر ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔

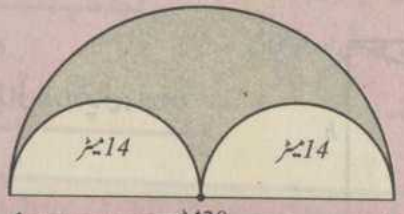
متوازی الاضلاع کا رقبہ $= 2$ (ΔABC کا رقبہ)

10- نیچے دی گئی واشلوں کا رقبہ معلوم کریں جس کے اندرونی اور بیرونی قطر دیے گئے ہیں۔

(i) 15 سینٹی میٹر اور 13 سینٹی میٹر (ii) 0.9 میٹر اور 1.2 میٹر

(iii) 40 ملی میٹر اور 33 ملی میٹر

11- سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کریں۔



12- مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 8 میٹر ہے، کا رقبہ معلوم کریں۔

13- مساوی الاضلاع مثلث کا ضلع 6 سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

14- قائمۃ الزاویہ مثلث کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 35 سینٹی میٹر ہیں۔

15- ایک مستطیل کا قاعدہ اس کے ارتفاع کا تین گنا ہے جبکہ اس کا رقبہ 147 مربع سینٹی میٹر ہے۔
قاعدہ اور ارتفاع معلوم کریں۔

16- اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ معلوم کریں جس کے ارتفاع کی لمبائی 18 سینٹی میٹر اور رقبہ 3 مربع میٹر ہے۔

17- ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 144 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کا ارتفاع معلوم کریں اگر اس کے
قاعدہ کی لمبائی 2 سینٹی میٹر ہو۔

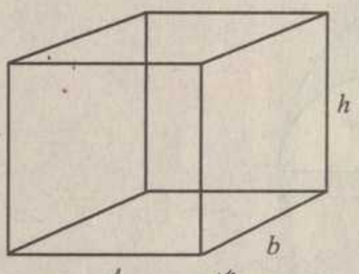
18- اس مستطیل کا رقبہ معلوم کریں جس کی لمبائی 2 میٹر اور چوڑائی 18 سینٹی میٹر ہے۔

19- ایک مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ $4\sqrt{3}$ مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

9.3 حجم VOLUMES

اس عنوان کے تحت ایسی اشکال کا مطالعہ کریں گے جو کہ مستوی سطح نہیں ہوتیں۔ اس کی سادہ ترین شکل مکعب یا مکعب نما ہے۔ یہ اشکال مکمل طور پر مستوی میں واقع نہیں ہوتیں۔ یہ اشکال ٹھوس (تین پہلو والی) کہلاتی ہیں۔

مکعب، مکعب نما Cube and Cuboid



شکل (i)

مکعب: Cube

ایک 6 پہلو شکل جس کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی برابر ہو، مکعب کہلاتی ہے۔

دی گئی شکل مکعب کی ہے۔

مکعب کی لمبائی $= \ell$

مکعب کی چوڑائی $= b$

مکعب کی اونچائی $= h$

جبکہ $\ell = b = h$

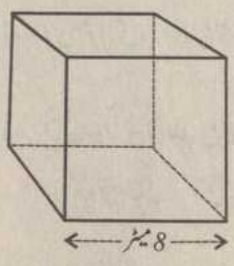
لہٰذا

مکعب کا حجم $= V = \ell \times \ell \times \ell$

یا $V = \ell^3$ مکعب اکائیاں

مثال:-

ایسے مکعب کا حجم معلوم کریں جس کا ہر کنارا 8 میٹر ہو۔



حل:

مکعب کا کنارا $= 8$ میٹر

حجم $= \ell^3$

$V = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$

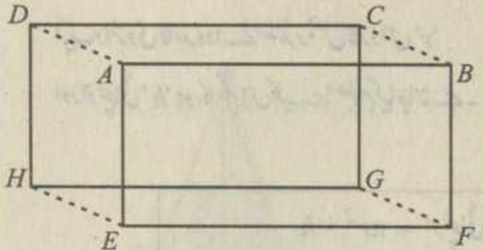
$V = 512$ مکعب میٹر

اطراف: لمبائی کی ایک طرف ہوتی ہے۔
رقبہ کی دو اطراف ہوتی ہیں۔
حجم کی تین اطراف ہوتی ہیں۔

مکعب نما Cuboid

ایک چھ پہلو شکل جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ہو، مکعب نما کہلاتی ہے۔ (یا مستطیلی متوازی الاضلاعی پائپ نما) شکل (ii) مکعب نما کو ظاہر کرتی ہے۔

مکعب نما کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی کو بالترتیب l, b اور h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی مکعب نما کی اطراف بھی کہلاتی ہیں۔

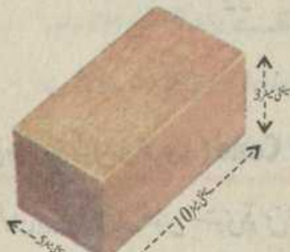


شکل (ii)

> ایک مکعب نما کا حجم V سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی لمبائی ℓ، چوڑائی b اور اونچائی h ہو۔
> $$V = \ell \times b \times h$$

مثال:-

لکڑی کے بلاک کا حجم معلوم کریں جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 10 سینٹی میٹر 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہیں۔



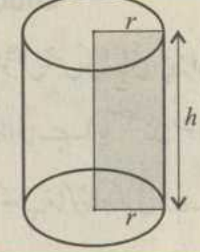
حل: دیا گیا ہے

لکڑی کے بلاک کی لمبائی = 10 سینٹی میٹر
لکڑی کے بلاک کی چوڑائی = 5 سینٹی میٹر
لکڑی کے بلاک کی اونچائی = 3 سینٹی میٹر

$V = \ell \times b \times h$
$= 10 \times 5 \times 3$
$= 150$ مکعب سینٹی میٹر

> **مکعب اور مکعب نما کا حجم:**
> 1- لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ایک ہی اکائی میں ہونے چاہئیں۔
> 2- درج بالا کلیہ سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

اونچائی $h = \frac{v}{\ell \times b}$	چوڑائی $b = \frac{v}{\ell \times h}$	لمبائی $\ell = \frac{v}{b \times h}$



ایک عمودی دائروی سلنڈر کا حجم
Volume of Right Circular Cylinder

ایک دائروی قاعدہ والے سلنڈر جس کا رداس 'r' اور اونچائی 'h' ہو، کا حجم اِس کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{سلنڈر کا حجم} = \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \text{اونچائی} = \pi r^2 \times h$$
$$\text{حجم} = \pi r^2 h$$

مثال:-

سلنڈر کا حجم 12320 مکعب سینٹی میٹر اور اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے، سلنڈر کا رداس معلوم کریں۔

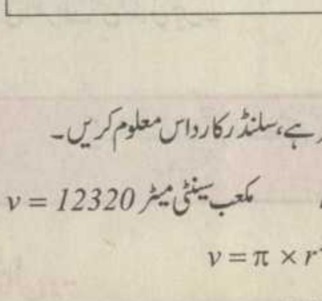
حل: دیا گیا ہے $v = 12320$ مکعب سینٹی میٹر، $h = 20$ سینٹی میٹر، $r = ?$

$$v = \pi \times r^2 \times h \Rightarrow r^2 = \frac{v}{\pi h}$$

$$r^2 = \frac{12320}{\frac{22}{7} \times 20} = \frac{12320 \times 7}{22 \times 20} = \frac{616 \times 7}{22} = 196$$

$r = 14$ سینٹی میٹر

عمودی دائروی کون (مخروط) Right Circular Cone



شکل (i)

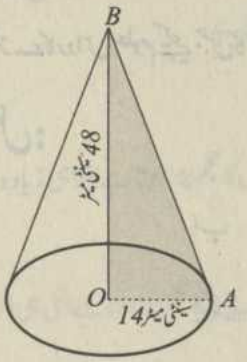
کون Cone ایک ٹھوس مستوی قوس نما سطح ہوتی ہے جس کو قاعدہ کہتے ہیں اور مستوی سے اوپر ایک کونا جس کو کون کا راس کہتے ہیں نکلا ہوتا ہے۔ ایک عمودی دائروی کون، ایک قائمۃ الزاویہ مثلث BOA (شکل (i)) میں دکھایا گیا ہے کو $\overline{OB}$ کے گرد گھما کر حاصل کیا جاتا ہے۔
کون کا قاعدہ ایک دائرہ جس کا رداس OA بنتا ہے۔
B کون کا راس ہے اور $\overline{BA}$ ترچھا ضلع ہے۔

$$\text{کون کا حجم} = \frac{1}{3} \times \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \text{ارتفاع}$$

$$\text{کون کا حجم} = v = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$$

مثال :-

ایک مخروط (کون) جس کے دائروی قاعدہ کا رداس 14 سینٹی میٹر ہے اور اس کا ارتفاع 48 سینٹی میٹر ہے۔ مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔)



حل: دیا گیا ہے کہ

قاعدہ کا رداس $= r = 14$ سینٹی میٹر

مخروط کا ارتفاع $= h = 48$ سینٹی میٹر

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

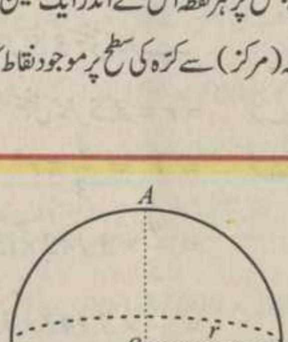
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 48$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 196 \times 48$

$= 9856$ مکعب سینٹی میٹر

کرہ Sphere

کرہ ایک سطح سے گھرا ہوا ایسا جسم ہوتا ہے جس پر ہر نقطہ اس کے اندر ایک معین نقطہ سے برابر فاصلہ پر ہوتا ہے۔ معین نقطہ کو کرہ کا مرکز کہتے ہیں۔ معین نقطہ (مرکز) سے کرہ کی سطح پر موجود نقاط کا فاصلہ کرّے کا رداس کہلاتا ہے جسے عموماً 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



کرے کا حجم $= \frac{2}{3} \times 2\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ جبکہ r کرے کا رداس کہلاتا ہے۔

نصف کرہ Hemisphere

اگر کرّے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ نصف کرہ کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

کرّے کا رداس معلوم کیجیے جس کا حجم 850 مکعب میٹر ہے۔ جبکہ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ ہے۔

حل:

کرّے کا حجم $= 850$ مکعب میٹر

رداس $= ?$

اب $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

چونکہ $r^3 = \frac{3V}{4\pi}$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{3\times 850\times 7}{4\times 22}$$

$$\Rightarrow r^3 = 202.8409$$

$$\Rightarrow r = (202.8409)^{\frac{1}{3}}$$

$= 5.88$ میٹر

مثال 2:-

کرے کا حجم معلوم کریں جس کا رداس 3.5 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

کرّے کا رداس $= r = 3.5$ سینٹی میٹر

کرّے کا حجم $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}\times 3.142\times (3.5)^3$$

$$= \frac{4}{3}\times 3.142\times 3.5\times 3.5\times 3.5$$

$V = 179.6$ مکعب سینٹی میٹر

حجم کی کچھ معیاری اکائیاں:

اگر ہم 1 سینٹی میٹر، 1 ملی میٹر یا 1 میٹر ضلع والے مکعب کو حجم کی پیائش کرنے کے لیے معیار مقرر کریں تو حجم کی اکائیاں ہوں گی

مکعب سینٹی میٹر
مکعب ملی میٹر
مکعب میٹر

حجم کے متعلقہ روزمرہ زندگی سے مسائل Real Life Problems Related to Volume

ایک ٹھوس شے کی جسامت کی مقدار کی پیمائش ہوتی ہے۔ٹھوس شے کی جسامت کی اس مقدار کو حجم کہتے ہیں۔
دوسرے لفظوں میں اس جگہ شے یا خلا کی پیمائش جو ٹھوس جسم گھیرتا ہے، اس کا حجم کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر حقیقی زندگی کے متعلقہ مسائل کو لیتے ہیں۔

1. ایک مکعب نما اونچا پانی جمع کرنے کے لیے ٹینک بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ پانی اس میں جمع کیا جا سکتا ہے۔
2. ایک مکعب نما ٹین کا ڈبہ تیل جمع کرنے کے لیے بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس مکعب نما کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنی ہی اس میں تیل جمع کرنے کی صلاحیت زیادہ ہوتی ہے۔

یاد رکھیے کہ:

-1 چونکہ ملی میٹر $10 = 1$ سینٹی میٹر

لہٰذا مکعب ملی میٹر $10 \times 10 \times 10 = 1$ مکعب سینٹی میٹر

مکعب ملی میٹر $1000 = 1$ مکعب سینٹی میٹر

-2 مکعب سینٹی میٹر $100 \times 100 \times 100 = 1$ مکعب میٹر

مکعب سینٹی میٹر $1000000 =$

یا **مکعب سینٹی میٹر $10^6 = 1$ مکعب میٹر**

مکعب ملی میٹر $1000 \times 1000 \times 1000 = 1$ مکعب میٹر

مکعب ملی میٹر $10^9 = 1$ مکعب میٹر

-3 مائعات کا حجم ماپنے کے لیے ہم اکائیاں لٹر (ℓ) یا ملی لٹر ($m\ell$) استعمال کرتے ہیں۔

ملی لٹر $1 = 1$ مکعب سینٹی میٹر

اور لٹر $1 = 1000$ مکعب سینٹی میٹر

لٹر $1000 =$ مکعب سینٹی میٹر $1000000 = 1$ مکعب میٹر

(1 کلو لٹر) $1 = 1k\ell$ مکعب میٹر

مثال 1:-

ایک ٹینک جس کی لمبائی، چوڑائی اور گہرائی بالترتیب 6.3 میٹر، 4.5 میٹر اور 3.6 میٹر ہے، کا حجم (گنجائش) لٹر میں معلوم کریں۔

حل:

ٹینک کی لمبائی $= 6.3$ میٹر

ٹینک کی چوڑائی $= 4.5$ میٹر

ٹینک کی گہرائی $= 3.6$ میٹر

ٹینک کا حجم $= \ell \times b \times h = 6.3 \times 4.5 \times 3.6$ مکعب میٹر

$= 102.06$ مکعب میٹر

یا

ٹینک کا حجم $= 102.06 \times 100 \times 100 \times 100$

$= 102060000$ مکعب سینٹی میٹر

$= 102060$ لٹر (∵ 1000 مکعب سینٹی میٹر = 1 لٹر)

مثال 2:-

ایک ٹینک کی گنجائش 60 کلو لٹر ہے۔ اگر ٹینک کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 5 میٹر اور 4 میٹر ہو تو اس کی گہرائی معلوم کریں۔

حل:

ٹینک کا حجم $= 60$ کلو لٹر $= 60000$ لٹر $= 60$ مکعب میٹر

ٹینک کی لمبائی $= 5$ میٹر

ٹینک کی چوڑائی $= 4$ میٹر

اب ٹینک کی گہرائی $= d$

حجم = لمبائی × چوڑائی × گہرائی

پس ٹینک کی گہرائی = حجم / (لمبائی × چوڑائی)

$= \frac{60}{20}$ (∵ 60000 لٹر = 60 مکعب میٹر)

$= 3$ میٹر

مشق 9.3

ٹھوس اجسام کے حجم معلوم کریں۔

1- ایک مکعب جس کا ضلع (کنارا) 4 سینٹی میٹر ہو۔

2- ایک مکعب جس کا کل سطحی رقبہ 96 مربع سینٹی میٹر ہو۔

3- ایک مکعب نما ڈبہ جس کی لمبائی 4 میٹر، چوڑائی 3 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہو۔

4- ایک عمودی سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا رداس 4 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔

5- ایک دائروی مخروط (کون) کا، جس کے قاعدہ کا رداس 3 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔

6- ایک کرہ کا، جس کا رداس 3 سینٹی میٹر ہو۔

7- ایک سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا محیط 4 سینٹی میٹر اور لمبائی 1 میٹر ہو۔

8- ایک مخروط کا، جس کی بلندی 9 سینٹی میٹر اور قاعدہ کا رداس 6 سینٹی میٹر ہو۔

جائزہ مشق -9

I- صحیح جوابات پر دائرہ لگایئے۔

1. اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی دو اضلاع کے مربع کے مجموعہ کے برابر ہو تو یہ کہلاتا ہے:

(a) مسئلہ فیثاغورث (b) غیر مساوی اضلاعی مثلث
(c) مساوی الاضلاع مثلث (d) متساوی الساقین مثلث

2. ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں اس کے رقبہ کی مقدار ہوتی ہے:

(a) $\frac{1}{2}bh$ (b) bh
(c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (d) $\frac{a+b+c}{2}$

3. مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 'a' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $\frac{1}{2}bh$ (b) bh (c) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

جائزہ مشق-9

4. مستطیل کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $l \times b$ (b) $\frac{1}{2} \times l + b$

(c) $\frac{1}{3} \times l + b$ (d) l^2

5. ایسا مربع جس کا ضلع 'S' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) S (b) $4S$ (c) $2S$ (d) S^2

6. دائرہ جس کا رداس 'r' ہے، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) r^2 (b) $2\pi r$ (c) πr^2 (d) $\pi^2 r$

7. نصف دائرہ کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2}{2}$ (b) πr^2 (c) $\pi^2 r$ (d) $2\pi r$

8. ایک مکعب کا حجم جس کا کنارا 'l' ہو:

(a) l^2 (b) $3l$ (c) l^3 (d) l^4

9. ایک عمودی دائروی سلنڈر کا حجم ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2 h}{3}$ (b) $\frac{\pi r^2 h}{2}$

(c) $\pi r^2 h$ (d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

II- خالی جگہوں کو پر کریں:

1. اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے برابر ہو تو اسے مسئلہ __________ کہتے ہیں۔

2. کسی بند شکل کی چار دیواری میں بند علاقہ __________ کہلاتا ہے۔

3. مثلث کا رقبہ = __________

4. کسی مثلث کے لیے ہیرو کلیہ کے مطابق __________ = A

5. کسی مساوی الاضلاع مثلث جس کے ضلع کی لمبائی 'a' ہو، کا رقبہ = __________ ۔

6. مستطیل کا رقبہ = __________ ۔

7. دائرہ کا رقبہ = ________________ ۔

8. مکعب جس کے کنارا کی لمبائی 'l' ہو، کا حجم ________________ کے برابر ہوتا ہے۔

9. کسی مکعب نما کا حجم = ________________ ۔

10. عمودی دائروی مخروط (کون) کا حجم = ________________ ۔

خلاصہ SUMMARY

مسئلہ فیثا غورث: کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دونوں اضلاع پر مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

رقبہ: کسی بھی بند شکل کی چار دیواری کے اندر کی جگہ ۔

مثلث کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع

مثلث کا رقبہ: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

a, b, c مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہیں: $s = \frac{a+b+c}{2}$

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ: $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ جبکہ 'a' مثلث کے ضلع کی لمبائی ہے:

مستطیل کا رقبہ: $A =$ چوڑائی $\times$ لمبائی

مربع کا رقبہ: $A =$ ضلع $\times$ ضلع

متوازی الاضلاع کا رقبہ: $A =$ قاعدہ $\times$ ارتفاع

دائرہ کا رقبہ: $A = \pi r^2$

دائرہ کا محیط: $C = 2\pi r$

نصف دائرہ کا رقبہ: $A = \frac{1}{2}(\pi r^2)$

واشل کا رقبہ: $A = \pi\left[r_1^2 - r_2^2\right]$

جبکہ r_1 بیرونی دائرہ کا رداس

r_2 اندرونی دائرہ کا رداس

حجم: سہ سمتی شکل میں گھرا ہوا علاقہ۔

مکعب کا حجم: $V = \ell^3$، ℓ کنارا کی لمبائی ہے۔

مکعب نما کا حجم: $V = \ell \times b \times h$

اونچائی $= h$ ، چوڑائی $= b$ ، لمبائی $= \ell$

عمودی دائروی سلنڈر کا حجم: $V = \pi r^2 h$

سلنڈر کی اونچائی $= h$

قاعدہ کا رداس $= r$

عمودی دائروی مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مخروط کا ارتفاع $= h$

قاعدہ کا رداس $= r$

کرّے کا حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

نصف کرّہ کا حجم: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$