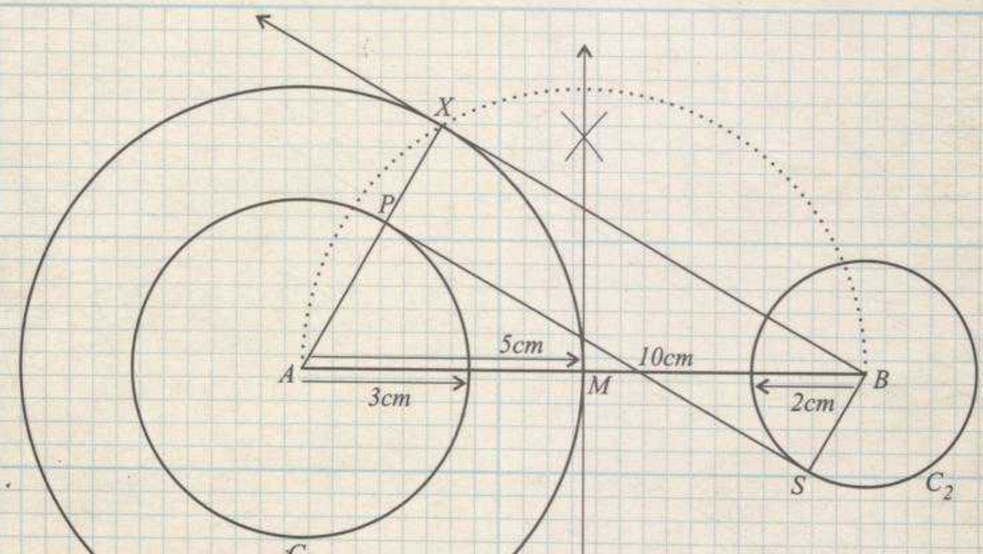
نیا ایڈیشن

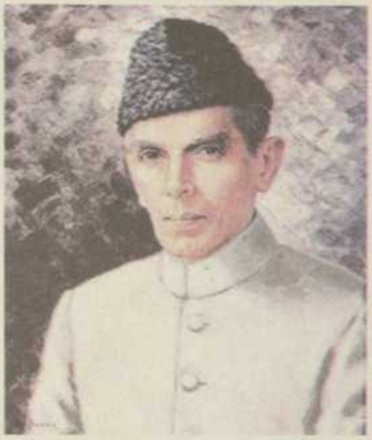
# جنرل ریاضی

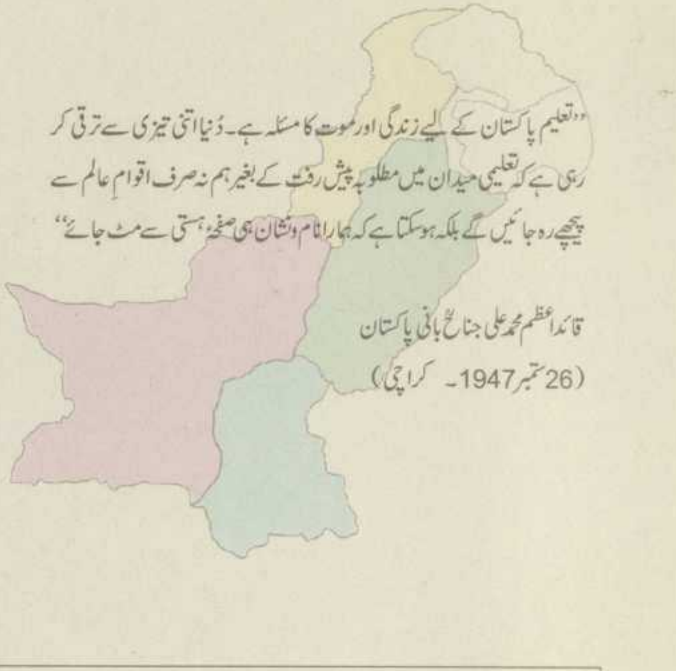
# 10




یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے
تعلیمی سال 2013-2020 کے لیے پنجاب کے
سرکاری سکولوں میں تقسیم کی گئی جیکٹ میں شامل ہے۔


ناشر: علی برادران





"تعلیم پاکستان کے لیے زندگی اور موت کا مسئلہ ہے۔ دُنیا اتنی تیزی سے ترقی کر رہی ہے کہ تعلیمی میدان میں مطلوبہ پیش رفت کے بغیر ہم نہ صرف اقوامِ عالم سے پیچھے رہ جائیں گے بلکہ ہوسکتا ہے کہ ہمارا نام ونشان ہی صفحۂ ہستی سے مٹ جائے"

قائداعظم محمد علی جناحؒ بانی پاکستان
(26 ستمبر 1947۔ کراچی)

جنرل ریاضی کا مضمون خاص طور پر ان طلباء کے لیے تیار کیا گیا ہے جنہوں نے اوپر کی جماعتوں میں ریاضی اور سائنس کا خصوصی مطالعہ کرنے کی بجائے سوشل سائنس کا مطالعہ کرنا ہوتا ہے۔ جنرل ریاضی کا نصاب خاص طور پر آرٹس گروپ اور علوم شریعہ کے طالب علموں کو مدنظر رکھ کر تیار کیا گیا ہے تا کہ وہ عملی زندگی میں حساب کتاب میں مہارت حاصل کر لیں۔ جنرل ریاضی کے نصاب میں کاروباری ریاضی، مالیاتی ریاضی، صارفین کی ریاضی اور بنیادی شماریات جیسے مضامین شامل کیے گئے ہیں۔ اس نئے نصاب کے پرانے نصاب کے مقابلے میں بہت کم وقت دینا پڑے گا اور اس سے جو وقت بچے گا وہ دوسرے مضامین کے مطالعہ میں صرف ہو سکے گا۔

مصنفین اور مدیران نے اس کتاب کی تیاری میں بہت محنت کی ہے اور اسے قومی نصاب ۲۰۰۶ء کے مطابق تیار کیا ہے۔ معلمین، طلبہ اور ان کے والدین سے درخواست ہے کہ اس کتاب (جنرل ریاضی) کا گہرا تنقیدی مطالعہ کریں اور اغلاط اور خامیوں سے مطلع کریں۔ ان کا یہ اقدام یقیناً بہت بڑا قومی خدمت ہوگا۔

ناشر
محبوب علی عاصم

اس کتاب کو پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور نے ناشر سے پرنٹ لائسنس حاصل
کر کے سرکاری سکولوں میں مفت تقسیم کے لیے بھی طبع کیا ہے۔
ناشر کی تحریری اجازت کے بغیر اس کتاب کا کوئی حصہ کسی امدادی کتاب،
خلاصہ، ماڈل پیپر یا گائیڈ وغیرہ میں شامل نہیں کیا جا سکتا۔

# جنرل ریاضی

# 10

ناشر: علی برادران
پنجاب پلازہ مچھلی منڈی اردو بازار لاہور
فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207
ویب سائٹ www.alibrotheran.com ای میل info@alibrotheran.com

جملہ حقوق بحق ناشر علی برادران لاہور محفوظ ہیں۔
بمطابق قومی نصاب 2006ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007ء
منظور کردہ: پنجاب کریکولم اتھارٹی (پنجاب) لاہور
بذریعہ مراسلہ نمبر PCA-12/19 تاریخ 27 نومبر 2012

## فہرست

| یونٹ نمبر | عنوانات | صفحہ نمبر |
|---|---|---|
| 1 | الجبری کلیے اور ان کے اطلاق | 1 |
| 2 | تجزی | 35 |
| 3 | الجبری حسابات | 57 |
| 4 | یک درجی مساوات اور غیر مساوات | 85 |
| 5 | دو درجی مساوات | 107 |
| 6 | قالب اور مقطع | 127 |
| 7 | جیومیٹری کے بنیادی تصورات | 175 |
| 8 | عملی جیومیٹری | 221 |
| 9 | رقبہ اور حجم | 247 |
| 10 | محدداتی جیومیٹری کا تعارف | 275 |
| | جوابات | 289 |
| | فرہنگ | 301 |
| | علامات | 306 |
| | انڈیکس | 307 |

## ممبران ریویو کمیٹی

ڈاکٹر طارق محمود ڈی۔ای۔اے۔ کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک ونگ
(وزارت کیپیٹل ڈویلپمنٹ اتھارٹی۔اسلام آباد۔)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم شعبہ ریاضی (قائد اعظم یونیورسٹی اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین شعبہ ریاضی (سرگودھا یونیورسٹی سرگودھا)
منور دین اعوان اے۔ای۔اے (ر) کریکولم ونگ
(وفاقی وزارت تعلیم (ڈی فنکٹ) اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم ملک شعبہ ریاضی
(پنجاب یونیورسٹی، قائد اعظم کیمپس لاہور)
ڈاکٹر بشریٰ سینئر ہیڈ مسٹریس
(گورنمنٹ مسلم ماڈل گرلز ہائی سکول، گوجرانوالہ)
فہیم حسین سینئر ماہر مضمون (پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور)
افضال حسین ڈیسک آفیسر (پنجاب کریکولم اتھارٹی لاہور)

مصنفین ڈاکٹر محمد عذیر احمد (پی۔ایچ۔ڈی) مقصود رضا احمد (ایم ایس سی، ایم فل)
ایڈیٹر جاوید اقبال (ایم ایس سی)
ترجمہ محمد اقبال باقر (ایم ایس سی) جاوید اقبال (ایم ایس سی)
کوآرڈینیٹر: محبوب علی عاصم
کمپوزنگ اینڈ ڈیزائننگ: کاشف لطیف۔محمد طاہر

ناشر علی برادران پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور
مطبع علی برادران پبلشرز اینڈ پرنٹرز لاہور

| تاریخ اشاعت | ایڈیشن | بار | تعداد | قیمت |
|---|---|---|---|---|
| مارچ 2019ء | پنجم | اول | 25000 | 147.00 |

# یونٹ 1

# الجبری کلیے اور ان کا اطلاق

# ALGEBRAIC FORMULAS AND APPLICATIONS

◄ الجبری جملے ◄ الجبری کلیے ◄ مقادیر اصم اور ان کا اطلاق ◄ ناطق بنانا

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◄ ایک ناطق جملہ، ناطق عدد ہوتا ہے۔
- ◄ ایک ناطق جملہ دو کثیر درجی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا حاصل قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی صورت میں ظاہر جبکہ $q(x)$ غیر صفر کثیر رقمی ہوتا ہے۔
- ◄ یہ مشاہدہ کر لیں کہ دیا گیا الجبری جملہ ایک • کثیر رقمی جملہ ہے یا نہیں • ناطق جملہ ہے یا نہیں
- ◄ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو ایک مختصر ترین درجہ والی رقوم میں لکھ سکیں ۔ جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ جملوں کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہوں۔
- ◄ مشاہدہ کر سکیں کہ دیا گیا ناطق جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- ◄ دیے گئے ناطق جملہ کو مختصر ترین رقوم میں ظاہر کرنا۔ ◄ ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- ◄ ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملہ سے تقسیم کرنا اور حاصل شدہ رقوم کو مختصر ترین صورت میں لکھنا۔
- ◄ الجبری جملہ کی کسی خاص حقیقی عدد کے لیے قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◄ کلیے $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ ، $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$ جان سکیں۔
- ◄ $(a+b)$ ، $(a-b)$ کی قیمتیں معلوم ہوں تو $a^2+b^2$ اور $ab$ کی قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◄ کلیہ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ کو جان سکیں
  - • $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
  - • $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- ◄ کلیے $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a\pm b) \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ حاصل کر سکیں۔
  - • $a^3 \pm b^3$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں $a \pm b$ اور $ab$ دیے گئے ہوں۔ • تسلسل حاصل ضرب $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ معلوم کر سکیں۔
- ◄ مقادیر اصم کی پہچان اور ان کا
- ◄ دوسرے درجہ کی مقادیر اصم کی وضاحت کرنا۔ دوسرے درجہ کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل استعمال کرتے ہوئے ان کے مخارج کو ناطق بنانا اور قیمت معلوم کر سکیں۔
- ◄ $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ کی طرح کے حقیقی اعداد سے ناطق بنانے کی وضاحت کر سکیں۔ جبکہ 'x' اور 'y' قدرتی اعداد اور 'a'، 'b' صحیح اعداد ہوں۔

## 1.1 الجبری جملے: ALGEBRAIC EXPRESSIONS

الجبرا حساب کی توسیع ہے الجبرا میں $a, b, c$ جیسے حروف تہجی مستقل مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور $x, y, z$ کو ہم قابل انتخاب عددی قیمت کیلئے استعمال کرتے ہیں۔

الجبری جملے میں اعداد اور حروف تہجی عوامل کی علامتوں $\div, \times, -, +$ کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں جبکہ علامات + اور − الجبری جملے کی رقوم (Terms) کو جدا کرتی ہیں۔

**مثال:**

| | |
|---|---|
| $ax + by$ | 2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے |
| $3x - 2y$ | 2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے |
| $9x^2 - 7xy + 7y^2$ | 3 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے |
| $5xy$ | 1 رقم (Term) پر مشتمل ہے |

درج بالا میں اعداد $a, b, 3, 2, 9, 7, 5$ ان جملوں میں عددی سر کہلاتے ہیں جبکہ $x, y$ متغیرات کہلاتے ہیں۔

ایک الجبری جملہ تین طرح کا ہوتا ہے۔

(i) کثیر رقمی Polynomial　(ii) ناطق جملہ Rational　(iii) غیر ناطق جملہ Irrational

$x$ متغیر میں '$n$' درجہ کی کثیر رقمی یوں لکھی جاتی ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

جبکہ '$n$' ایک غیر منفی عدد ہے اور $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$ حقیقی اعداد ہیں۔ جبکہ $a_n \neq 0$
چونکہ متغیر '$x$' کا سب سے بڑا قوت نما '$n$' ہے لہذا اس کثیر رقمی کا درجہ '$n$' ہے۔

### 1.1.1 ناطق جملے: Rational Expressions

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ کی طرز کا عدد جس میں ($q \neq 0$ اور $p, q \in Z$) ناطق عدد کہلاتا ہے۔

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی طرز میں لکھا گیا ایک جملہ (جس میں $Q(x) \neq 0$ جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ متغیر $x$ میں کثیر رقمیاں ہیں) ایک ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

(i) $\frac{x^2+1}{x^3+x^2+3}$ (ii) $\frac{x^3+8}{x+1}$ (iii) $\frac{2x^2+3x+3}{x^2+x+2}$ (iv) $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$

ناطق جملے کہلاتے ہیں۔ ناطق جملے، ناطق اعداد کی طرح جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کیے جا سکتے ہیں۔

ناطق جملے دو طرح کے ہوتے ہیں۔

(i) واجب ناطق جملے
(ii) غیر واجب ناطق جملے

## واجب ناطق جملے: Proper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے اگر $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

مثال: $\frac{3x^3+4x^2+5}{2x^4+1}$ , $\frac{x+1}{x^2+3x+7}$ واجب ناطق جملے ہیں

## غیر واجب ناطق جملے: Improper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، $Q(x) \neq 0$ جس میں $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجہ کے برابر یا اس کے درجہ سے بڑا ہو غیر واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال: $\frac{x+5}{x-1}$ ، $\frac{x^3+1}{x^2-x+4}$ ، $\frac{x^2+4x+9}{x^2+1}$ ، $\frac{x^2+2x+4}{x+1}$ غیر واجب ناطق جملے ہیں

## 1.1.3- دیے گئے الجبری جملہ کا مشاہدہ Examine a Given Algebraic Expression

درج ذیل جملوں پر غور کیجیے۔

(i) $2x^2+3x+9$ (ii) $x+5$ (iii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1$ (iv) $\frac{-4}{x^3}$

(i) اور (ii) کثیر رقتی ہیں لیکن (iii) اور (iv) کثیر رقتی نہیں۔ کیونکہ (iii) اور (iv) متغیرات کے قوت نما صحیح اعداد نہیں ہیں۔

درج ذیل پر بھی غور کیجیے۔

(i) $\frac{x+1}{x^3+x^2+3}$ (ii) $\frac{x^3+1}{x-1}$ (iii) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1$

(iv) $2\sqrt{y}+\frac{3}{\sqrt{x}}+1$ (v) $\frac{\sqrt{y}+3}{x^{2/3}}$

(i) اور (ii) ناطق جملے ہیں لیکن (iii) اور (iv) اور (v) ناطق جملے نہیں ہیں۔ کیونکہ متغیرات کے قوت نما صحیح اعداد ہیں۔

## 1.1.4- ناطق جملے اپنی مختصر ترین شکل میں Rational Expressions in its Lowest Terms

اگر $A, B$ اور $C$ کثیر رقمیاں ہوں جبکہ $B, C \neq 0$ ہو تو $\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$

(جو کہ کسور کا بنیادی قانون کہلاتا ہے)

اس اصول کو ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

ایک ایسا ناطق جملہ جس کے شمار کنندہ اور مخرج میں '1' اور $-1$ کے علاوہ کوئی مشترک جزو نہ ہو اپنی مختصر ترین شکل میں کہلاتا ہے۔

یہ جاننے کے لیے کہ کوئی جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، ہم دی گئی مثال پر غور کرتے ہیں۔

**مثال:-** $\frac{8x^3y^2}{12xy^5}$ کی مختصر ترین شکل معلوم کریں۔

**حل:**

$$\frac{8x^3y^2}{12xy^5} = \frac{2x^2.4xy^2}{3y^3.4xy^2}$$

$$= \frac{2x^2}{3y^3}$$

پس کسی بھی ناطق جملے کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم شمارکنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بناتے ہیں اور اس کے بعد کسروں کے بنیادی اصول کی مدد سے مطلوبہ جملہ حاصل کرتے ہیں۔

مثلاً

$$\frac{b^2-a^2}{b^3-a^3} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)(b^2+ab+a^2)}$$

$$= \frac{b+a}{b^2+ab+a^2}$$

## 1.1.5- ناطق جملوں کا اختصار — Reduce a Rational Expression to its Lowest Terms

**مثال:-** مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{32x^5x^7}{-4x^2y^9}$ (ii) $\frac{2-x}{3x^2-5x-2}$

**حل:**

(i) $\frac{32x^5y^7}{-4x^2y^9}$

$$= -\frac{8x^3.4x^2y^7}{y^2.4x^2y^7}$$

$$= -\frac{8x^3}{y^2}$$

(ii) $\frac{2-x}{3x^2-5x-2}$

$$= \frac{2-x}{3x^2-6x+x-2}$$

$$= \frac{2-x}{3x(x-2)+1(x-2)}$$

$$= \frac{2-x}{(3x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(-1)(x-2)}{(3x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{3x+1}$$

## 1.1.6- ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب Sum, Difference and Product of Rational Expressions

ہم ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب درج ذیل مثالوں سے سیکھتے ہیں۔

**مثال 1:-**

حل کریں۔

(i) $\frac{x+1}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}$

(ii) $\frac{x+2}{x^3+1}+\frac{x}{x^2-1}$

**حل:**

(i) $\frac{x+1}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{x+1}{x^2-2x-x+2}+\frac{x+2}{x^2-3x-x+3}$$

$$=\frac{x+1}{x(x-2)-1(x-2)}+\frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}$$

$$=\frac{x+1}{(x-2)\ (x-1)}+\frac{x+2}{(x-3)\ (x-1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)\ +\ (x+2)(x-2)}{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{x^2-3x+x-3+x^2-2x+2x-4}{(x^2-2x-x+2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-2x-7}{(x^2-3x+2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-2x-7}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$(ii)\quad \frac{x+2}{x^3+1}+\frac{x}{x^2-1}$$

$$=\frac{x+2}{(x+1)\,(x^2-x+1)}+\frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)\,+\,x(x^2-x+1)}{(x+1)\,(x-1)\,(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x-x-2+x^3-x^2+x}{(x^2-1)\,(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x^2-x^2+x-1}$$

$$=\frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x-1}$$

**مثال 2:-**

حل کریں۔

$$(i)\quad \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$(ii)\quad \frac{x+5}{x^2-6x}-\frac{x}{x-6}$$

**حل:**

$$(i)\quad \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$=\frac{x+3}{(x-2)\,(x+2)}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x+3)(1)\,-\,(x-1)(x-2)}{(x-2)\,(x+2)}$$

$$= \frac{x+3-(x^2-2x-x+2)}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+3-x^2+3x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{4x-x^2+1}{x^2-4}$$

$$= \frac{1+4x-x^2}{x^2-4}$$

(ii) $\frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$

$$= \frac{x+5}{x(x-6)} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5-x.x}{x(x-6)}$$

$$= \frac{x+5-x^2}{x^2-6x}$$

$$= \frac{5+x-x^2}{x^2-6x}$$

**مثال 3:-**

مختصر کریں۔

(i) $\frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$

(ii) $\frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$

**حل:**

(i) $\frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \times \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2-x+1}$$

(ii) $$\frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$$

$$= \frac{2x^2(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$$

$$= \frac{2x^2}{6x+1}$$

## 1.1.7- ناطق جملوں کی تقسیم: Division of Rational Expressions

ناطق جملوں کی تقسیم کا طریقہ یہ ہے کہ پہلے جملوں کے شمارکنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بنائیں۔ پھران میں سے مشترک (یکساں) جملے کاٹ دیں۔

**مثال:-**

مختصر کیجیے۔

(i) $$\frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

(ii) $$\frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

**حل:**

(i) $$\frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \div \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \times \frac{(x+1)\ (x+1)}{(x-2)\ (x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+x}{x+2}$$

(ii) $$\frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \times \frac{(x+1)\ (x+1)}{1-3x}$$

$$= \frac{(3x-1)\ (x+1)}{(1-3x)}$$

$$= \frac{(3x-1)\ (x+1)}{-(3x-1)}$$

$$= -(x+1)$$

## 1.1.8- الجبری جملے کی قیمت Value of an Algebraic Expression

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ میں 'x' کی جگہ کوئی حقیقی عدد رکھیں تو ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہ حقیقی عدد، $P(x)$ کی قیمت کہلاتی ہے۔ اگر $x = a$ , $a \in R$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت $P(a)$ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

اگر $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔ اگر (i) $x = 1$ , (ii) $x = 2$

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

(i) $P(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 + 5(1) + 1$

$= 4 + 3 + 5 + 1$

$= 13$ لہذا

$P(1) = 13$ اور

(ii) $P(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 + 5(2) + 1$

$= 32 + 12 + 10 + 1 = 55$

$P(2) = 55$ پس

**مثال 1:-**

اگر $P(x)=4x^4+3x^2-5x+1$ ہو تو $P(-1)$ معلوم کریں۔

**حل:** چونکہ $P(x)=4x^4+3x^2-5x+1$

$$P(-1)=4(-1)^4+3(-1)^2-5(-1)+1$$
$$=4+3+5+1$$
$$=13$$

**مثال 2:-**

اگر $P(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^3+8}$ ہو تو $P(1)$ معلوم کریں۔

**حل:**

$$P(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^3+8}$$

$$P(1)=\frac{1^2-5(1)+6}{1^3+8}=\frac{1-5+6}{1+8}$$

$$=\frac{2}{9}$$

## مشق 1.1

حل کریں۔

-1 اگر $P(x)=x^4+3x^2-5x+9$ ہو تو $x=0$ اور $x=1$ کے لیے $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-2 اگر $P(x)=2x^3+2x^2+x-1$ ہو تو $P(-2)$ معلوم کریں۔

-3 اگر $P(y)=3y^2+\dfrac{y}{4}+9$ ہو تو $P(0)$ معلوم کریں۔

-4 اگر $P(x)=9x^3-2x^2+3x+1$ ہو تو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

-5 اگر $P(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x+1}$ ہو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

-6 اگر $P(r)=2\pi r$ ہو تو $r=3$ اور $\pi=\dfrac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

-7 اگر $P(r)=4\pi r^2$ ہو تو $r=8$ اور $\pi=\dfrac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

-8 اگر $P(y)=y^4+\dfrac{3y^3}{2}-y^2+1$ ہو تو $y=2$ اور $y=-2$ کے لیے $P(y)$ معلوم کریں۔

دیے گئے ناطق جملوں کو ان کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کیجیے۔

9- $\frac{8x^2y^2}{12x^4y}$

10- $\frac{25a^3b^2}{14a^2b^4}$

11- $\frac{16a^6b^7}{12a^3b^5+20a^5b^4}$

12- $\frac{18m^5x^3}{27m^4x^8-36m^6x^6}$

13- $\frac{5c-5d}{c^2-d^2}$

14- $\frac{x^2-y^2}{3y-3x}$

مختصر کیجیے۔

15- $\frac{x}{x-y}+\frac{x^2}{x^2+y^2}$

16- $\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}+\frac{3x}{x+1}$

17- $\frac{x+2}{x^2+3x+2}-\frac{x-5}{x^2-x-6}$

18- $\frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}-\frac{2x+3y}{2x-3y}$

19- $\frac{x}{x^2+xy}-\frac{y}{x^2-y^2}$

20- $\frac{x+y}{xy+y^2}-\frac{x}{x^2-xy}$

21- $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x^2+1}$

22- $\frac{5x}{x-9}+\frac{x^2-2x+1}{x^2-12x+27}-\frac{6x}{x-3}$

23- $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\div\frac{x}{x-2}$

24- $\frac{x^2-36}{x^2-1}\div\frac{x-6}{1-x}$

25- $\frac{x^2-5x}{x-1}\div\frac{x^2-25}{x^2+x+20}$

26- $\frac{2x^2-5x-12}{4x^2+4x-3}\div\frac{2x^2-7x-4}{6x^2+5x-4}$

27- $\frac{x(2x-1)^2}{2x^2-1}\div\frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$

28- $\frac{x^2+x}{x^2-1}\times\frac{x+1}{x^3+1}$

29- $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}\times\frac{x}{3x+9}$

30- $\frac{x+5}{x^2+6x}\times\frac{x^3+6x^2}{x+5}$

31- $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\times\frac{x+1}{x-1}$

32- $\frac{x^2+4x+3}{x+3}\times\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

## 1.2 کُلیے FORMULAE

ایک کلیہ، الجبری شکل میں ایک قانون کو ظاہر کرتا ہے جبکہ کُلیے اس کی جمع ہیں۔

### 1.2.1- کلیہ 1

$$(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2+(a-b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \\ &= 2a^2+2b^2 \\ &= 2(a^2+b^2) \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

### کلیہ 2

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2-(a-b)^2 \\ &= (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \\ &= 4ab \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

### مثال 1:-

$a^2+b^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a+b = 8$ اور $ab = 12$

حل:

چونکہ $a+b = 8$

$(a+b)^2 = (8)^2$ — دونوں اطراف مربع لینے سے

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= 64 \\ a^2+b^2 &= 64-2ab \\ &= 64-2(12) \quad \because ab = 12 \\ &= 64-24 \\ a^2+b^2 &= 40 \end{aligned}$$

علامت "$\because$" کا مطلب ہے کیونکہ

## مثال 2:-

ab کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b = 9$ اور $a - b = 3$

**حل:** ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$(9)^2 - (3)^2 = 4ab$$
$$81 - 9 = 4ab$$
$$4ab = 72$$
$$ab = \frac{72}{4}$$
$$ab = 18$$

## 1.2.2- کلیہ 3

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

فرض کیا $p = a + b$

$$L.H.S = (a+b+c)^2 = (p+c)^2$$
$$= p^2 + 2pc + c^2$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \quad (\text{یہاں } p = a+b)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$= R.H.S$$

## مثال 3:-

$a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b + c = 12$ اور $ab + bc + ca = 8$

**حل:** ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$
$$(12)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(8)$$
$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 16$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 128$$

## مثال 4:-

$a+b+c$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a^2+b^2+c^2 = 100$ اور $ab+bc+ca = 22$ ہو

**حل:** ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$= (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$$

$$= 100+2(22)$$

$$= 100+44$$

$$(a+b+c)^2 = 144$$

$$(a+b+c)^2 = (12)^2$$

$$a+b+c = \pm 12$$

| نتائج | |
|---|---|
| (i) | $x^2 = a^2$ |
| | $x = \pm a$ |
| (ii) | $x^2 = a$ |
| | $x = \pm\sqrt{a}$ |

## مثال 5:-

$ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a^2+b^2+c^2 = 36$ اور $a+b+c = 8$ ہو

**حل:-** ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$8^2 = 36+2(ab+bc+ca)$$

$$64-36 = 2(ab+bc+ca)$$

$$2(ab+bc+ca) = 28$$

$$ab+bc+ca = \frac{28}{2}$$ (دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے)

$$ab+bc+ca = 14$$

### 1.2.3- کلیہ 4

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$L.H.S = (a+b)^3$$

$$= (a+b)^2 \ (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) \ (a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$= R.H.S$$

### کلیہ 5

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$L.H.S = (a-b)^3$$

$$= (a-b)^2 \ (a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2) \ (a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (\because ab^2 = b^2a)$$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$= R.H.S$$

## کلیہ 6

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

$$= L.H.S$$

## کلیہ 7

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

$$= L.H.S$$

### مثال 6:-

$x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $xy = 8$ اور $x + y = 5$

**حل:**

$$x + y = 5$$

$(x+y)^3 = (5)^3$ (دونوں اطراف کا مکعب لینے سے)

$$x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 125$$

$x^3 + y^3 + 3(8)(5) = 125$ ($xy = 8$ اور $x + y = 5$ رکھنے سے)

$$x^3 + y^3 + 120 = 125$$

$$x^3 + y^3 = 125 - 120$$

$$\therefore x^3 + y^3 = 5$$

مثال 7:-

$a^3 - b^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a - b = 6$ اور $ab = 7$

حل:

$$a - b = 6$$

$$(a-b)^3 = (6)^3$$ (دونوں اطراف کا مکعب لینے سے)

$$a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 3(7)(6) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 126 = 216$$

$$a^3 - b^3 = 216 + 126$$

$$a^3 - b^3 = 342$$

مثال 8:-

$x^3p^2 - 8y^3p^2 - 4x^3q^2 + 32y^3q^2$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

حل:

$$x^3p^2 - 8y^3p^2 - 4x^3q^2 + 32y^3q^2$$ (رقوم کی ترتیب بدلنے سے)

$$= p^2(x^3 - 8y^3) - 4q^2(x^3 - 8y^3)$$

$$= (p^2 - 4q^2)(x^3 - 8y^3)$$

$$= \left[(p)^2 - (2q)^2\right]\left[(x)^3 - (2y)^3\right]$$

$$= (p - 2q)(p + 2q)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال 9:-

$64x^6 - 729y^6$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

حل:

$$64x^6 - 729y^6 = 2^6x^6 - 3^6y^6$$

$$= (2x)^6 - (3y)^6$$

$$= \left[(2x)^3\right]^2 - \left[(3y)^3\right]^2$$

$$= \left[(2x)^3 - (3y)^3\right]\left[(2x)^3 + (3y)^3\right]$$

$$= (2x - 3y)\left[4x^2 + 6xy + 9y^2\right](2x + 3y)\left[4x^2 - 6xy + 9y^2\right]$$

علامت "∴" کا مطلب ہے "لہذا"

## مثال 10:-

$(x+y)^3+64$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

**حل:**

$$(x+y)^3+64$$
$$=(x+y)^3+(4)^3$$
$$=(x+y+4)\left[(x+y)^2-(x+y)4+(4)^2\right]$$
$$=(x+y+4)\left[x^2+y^2+2xy-4x-4y+16\right]$$

## مثال 11:-

$x^6-y^6$ مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

**حل:**

$$x^6-y^6$$
$$=(x^3)^2-(y^3)^2$$
$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

## مشق 1.2

درج ذیل سوالات فارمولوں کی مدد سے حل کریں۔

1. $(x+2y)^2+(x-2y)^2$
2. $(5x+3y)^2+(5x-3y)^2$
3. $(3l+2m)^2-(3l-2m)^2$
4. $(l+m)(l-m)(l^2+m^2)(l^4+m^4)$

5. $(ab-\frac{1}{ab})^3$

6. $(2x+3y+2)^2$

7. $(2p+q)^3$

8. $(3p+q+r)^2$

9. $(2x+3y)^3$

10. $(x+y)^3-1$

11. $(x-y)^3+64$

12. $8x^3+27y^3$

13. $x^6-729y^6$

14. $64a^6-b^6$

15. $a^3-b^3$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a-b=4$ اور $ab=-5$

16. ثابت کیجیے۔ $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=4$

17. $a^2+b^2$ اور $ab$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b=5$ اور $a-b=3$

18. $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b+c=6$ اور $ab+bc+ca=11$

19. $x^3+y^3$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $x+y=7$ اور $xy=10$

20. $(x-y)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $xy=-16$ اور $x^2+y^2=86$

21. $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b+c=11$ اور $a^2+b^2+c^2=81$

22. $(a+b+c)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $ab+bc+ca=7$ اور $a^2+b^2+c^2=32$

# 1.3 مقادیراصم اوران کا اطلاق SURDS AND THEIR APPLICATIONS

## 1.3.1 مقادیراصم Surds

**ناطق اعداد: Rational Numbers**

ایک عدد جس کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان کیا جا سکے جبکہ '$p, q$' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\frac{3}{4}, \frac{2}{1}, \frac{8}{7}, \frac{-2}{5}$ تمام ناطق اعداد ہیں۔

**غیر ناطق اعداد: Irrational Numbers**

ایک حقیقی عدد جو کہ ناطق عدد نہ ہو غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ وغیرہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

صاف ظاہر ہے کہ ایک غیر ناطق عدد کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان نہیں کیا جا سکتا جبکہ $p, q$ صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

**حقیقی اعداد: Real Numbers**

دو غیر مشترک ناطق اعداد کے سیٹ $Q$ اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ $Q'$ کا یونین حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

**جذر کی علامت والی مقادیراصم: Surds of Radicals**

جذر کی علامت پر مشتمل غیر ناطق عدد کو مقادیراصم کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4+3\sqrt{5}, 10-4\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام کی تمام مقادیراصم ہیں۔

**مثال:**

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ درجہ 2 کی مقادیراصم ہے۔

(ii) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$ درجہ 3 کی مقادیراصم ہے۔

(iii) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ درجہ $n$ کی مقادیراصم ہے۔ '$a$' کو مجذور کہتے ہیں۔

## جذر کے قوانین Laws of Radicals

جیسا کہ مقدار اصم کو ناطق قوت نما میں لکھا جا سکتا ہے۔ لہذا قوت نما کے قوانین کا بھی مقادیر اصم پر اطلاق ہوتا ہے۔
پس کسی بھی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق اعداد 'a' اور 'b' کے لیے، ہمارے پاس درج ذیل قوانین ہیں۔

| جذر کے قوانین | قوت نما کے قوانین |
|---|---|
| (i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ | (i) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ |
| (ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$ | (ii) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\ b^{\frac{1}{n}}$ |
| (iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$ |
| (iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ | (iv) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$ |

## اصل مقادیر اصم: Pure Surds

ایسی مقدار اصم جس کا جز وضربی صرف '1' ہو اور دوسرا جز وضربی غیر ناطق ہو۔ اصل مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $\sqrt{2},\ \sqrt{11},\ \sqrt[4]{3}$ خالص مقادیر اصم ہیں۔

## مخلوط مقادیر اصم: Mixed Surds

ایسی مقدار اصم جس کا '1' کے علاوہ کوئی اور ناطق جز وضربی ہو اور دوسرا جز وضربی غیر ناطق ہو، مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $2\sqrt{3},\ 5\sqrt{7}$ مخلوط مقادیر اصم ہیں۔

## 1.3.2 دوسرے درجہ کی مقادیر اصم: Surds of Second Order

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ایک ایسی مقدار اصم ہے جس کا مرتبہ 2 ہے یعنی کہ دو درجی مقدار اصم۔

یاد رکھئے:

علامت $\sqrt{\ }$ جذر کی علامت ہے جس کا انڈیکس 2 ہے۔

### مشابہ مقادیر اصم: Similar Surds

ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق جز وضربی ایک جیسا ہو مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

$\sqrt{3},\ 5\sqrt{3},\ \frac{1}{7}\sqrt{3}$ مشابہ مقادیر اصم ہیں۔

ایسی مقادیر اصم جن کے غیر ناطق جز وضربی مختلف ہوں۔ مختلف مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

$\sqrt{2},\ 3\sqrt{5},\ 2\sqrt{3}$ مختلف مقادیر اصم ہیں۔

### مقادیر اصم کی جمع اور تفریق: Addition and Subtraction of Surds

مشابہ مقادیر اصم کی جمع اور تفریق کی جاسکتی ہیں۔

مثال:

(i) $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (6+5)\sqrt{5} = 11\sqrt{3}$

(ii) $12\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (12+4-6)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

### مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم: Multiplication and Division of Two Surds

ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کو درج ذیل قوانین کے تحت ضرب دی جاسکتی ہے اور تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

کسی بھی قدرتی اعداد '$m$' اور '$n$' کے لیے

(i) $\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$ (ii) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$

**مثال 1:** $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ کو مختصر کریں۔

**حل:** قانون "$\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$" کے مطابق

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$

مثال 2:-

$\sqrt{180} \div \sqrt{24}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\sqrt{180} \div \sqrt{24} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{180}{24}} \quad \left[ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ کے مطابق} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}}$$

## مخرج کو ناطق بنانا: Rationalizing The Denominator

ہم کسی کسر کو اس کے مخرج میں جذر کی علامت ختم کر کے مختصر کر سکتے ہیں۔ ہم ایسا کرنے کے لیے مخرج اور شمار کنندہ دونوں کو اس جذری رقم سے ضرب دیتے ہیں۔ یہ عمل مخرج کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:- درج ذیل کو مختصر کریں۔

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$

حل: (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ کو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{5}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{7 \times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

مثال 2:-

$(2+\sqrt{3})\ (5-\sqrt{3})$ کو ضرب دیں۔

حل: $(2+\sqrt{3})\ (5-\sqrt{3})$

$= 2\times 5+2\times(-\sqrt{3})+5\times\sqrt{3}+\sqrt{3}(-\sqrt{3})$

$= 10-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3$

$= 7+3\sqrt{3}$

مثال 3:- ضرب دیں۔

$(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})(4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

حل: $(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})\ (4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

$= 12(\sqrt{5})^2+9\sqrt{5}\sqrt{2}-20\sqrt{2}\sqrt{5}-15(\sqrt{2})^2$

$= 12\times 5+9\sqrt{10}-20\sqrt{10}-15\times(2)$

$= 60-30-11\sqrt{10}$

$= 30-11\sqrt{10}$

## مثال 4:-

مختصر ترین شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{288}$ (ii) $\sqrt{147}$ (iii) $\sqrt{36a^3}$

**حل:**

(i) $\sqrt{288}$

| | |
|---|---|
| 2 | 288 |
| 2 | 144 |
| 2 | 72 |
| 2 | 36 |
| 2 | 18 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$$

$$= \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{2}$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

(ii) $\sqrt{147}$

| | |
|---|---|
| 7 | 147 |
| 7 | 21 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

$$= \sqrt{7 \times 7 \times 3}$$

$$= \sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{3}$$

$$= 7\sqrt{3}$$

(iii) $\sqrt{36a^3}$

$$= \sqrt{6 \times 6 \times a \times a \times a}$$

$$= \sqrt{6 \times 6} \times \sqrt{a \times a} \times \sqrt{a}$$

$$= 6 \times a \times \sqrt{a}$$

$$= 6a\sqrt{a}$$

# 1.4 ناطق بنانا: RATIONALIZATION

## دورقمی مقدار اصم: Binomial Surd

ایک ایسا دورقمی جملہ جس میں کم از کم ایک رقم مقدار اصم ہو۔ دورقمی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثلاً $a + b\sqrt{x},\ \sqrt{x} + \sqrt{y}$ دورقمی مقادیر اصم ہیں۔

## دورقمی مقادیر اصم کا کانجوگیٹ: Conjugate of Binomial Surds

(i) $a + b\sqrt{x}$ اور $a - b\sqrt{x}$

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ اور $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

درج بالا ایسی مقادیر اصم کے جوڑے ہیں جن کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہے۔ مقادیر اصم کا ایسا جوڑا دورقمی مقادیر اصم کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔ جبکہ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔

(i) $2 + 3\sqrt{5}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $2 - 3\sqrt{5}$ ہے۔

(ii) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ ہے۔

یاد رکھیے کہ: دورقمی کانجوگیٹ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزوضربی کہلاتے ہیں۔

## جزوناطق Rationalizing Factor

جب دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہو تو وہ دونوں ایک دوسرے کا جزوناطق ساز جزوضربی کہلاتے ہیں۔

مثال:-

(i) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ (جوکہ ناطق ہے)

$2\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ کا ناطق ساز جزوضربی ہے

(ii) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ (جوکہ ایک ناطق ہے)

لہٰذا $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ اور $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزوضربی ہیں۔

## مقادیر اصم کو ناطق بنانا: Rationalization of Surds

کسی مقدار اصم کو مناسب ناطق ساز جزو سے ضرب دے کر اسے ناطق عدد میں تبدیل کرنے کا عمل مقدار اصم کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

**مثال 1:-**

$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔

**حل:-**

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{5+2\sqrt{3}} \times \frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{25-12} = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

**مثال 2:-**

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ کے مخرج کو ناطق بنایے۔

**حل:**

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

## مثال 3:-

اگر $x = 3+\sqrt{8}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $\frac{1}{x}$　(ii) $x+\frac{1}{x}$　(iii) $x-\frac{1}{x}$　(iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(v) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$　(vi) $x^2+\frac{1}{x^2}$　(vii) $x^2-\frac{1}{x^2}$

**حل:**

(i) $\frac{1}{x} = \frac{1}{3+\sqrt{8}}$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{8}} \times \frac{3-\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{8}}{(3)^2-(\sqrt{8})^2} = \frac{3-\sqrt{8}}{9-8}$$

$$= 3-\sqrt{8}$$

(ii) $x+\frac{1}{x}$

$$= (3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})$$

$$= 3+\cancel{\sqrt{8}}+3-\cancel{\sqrt{8}}$$

$$= 6$$

(iii) $x-\frac{1}{x}$

$$= (3+\sqrt{8})-(3-\sqrt{8})$$

$$= \cancel{3}+\sqrt{8}-\cancel{3}+\sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{8}$$

$(iv)\quad (x+\frac{1}{x})^2$

$$(x+\frac{1}{x})^2 = 6^2 \qquad (\text{ے } (ii))$$

$$(x+\frac{1}{x})^2 = 36$$

$(v)\quad (x-\frac{1}{x})^2$

$$(x-\frac{1}{x})^2 = (2\sqrt{8})^2 \qquad (\text{ے } (iii))$$

$$(x-\frac{1}{x})^2 = 32$$

$(vi)\quad x^2+\frac{1}{x^2}$

$$= x^2+\frac{1}{x^2}+2-2$$

$$= (x^2+\frac{1}{x^2}+2)-2$$

$$= (x+\frac{1}{x})^2-2$$

$$= 36-2 \qquad (\text{ے } (iv))$$

$$= 34$$

$(vii)\quad x^2-\frac{1}{x^2}$

$$= (x+\frac{1}{x})\,(x-\frac{1}{x}) = 6(2\sqrt{8}) \qquad (\text{ے } (ii, iii))$$

$$= 12\sqrt{8}$$

## مشق 1.3

**.1** مخرج سے جذری علامت دور کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

**.2** درج ذیل جملوں کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ (ii) $4\sqrt{50}+\sqrt{200}+\sqrt{50}$

(iii) $(\sqrt{12}-\sqrt{2})(\sqrt{20}-3\sqrt{2})$ (iv) $(6+\sqrt{2})(5-\sqrt{5})$

(v) $(\sqrt{3}-2)(5-\sqrt{5})$ (vi) $(7+\sqrt{3})(5+\sqrt{2})$

**.3** درج ذیل کے مخارج کو ناطق بنایے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ (ii) $\frac{1}{4-\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

(v) $\frac{5\sqrt{7}}{2+3\sqrt{7}}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{29}{11+3\sqrt{5}}$

(viii) $\frac{17}{3\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$

**.4** اگر $x=\sqrt{5}+2$ ہو تو (i) $x+\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**.5** اگر $x=2+\sqrt{3}$ ہو تو (i) $x-\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**.6** اگر $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ہو تو (i) $x-\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**.7** اگر $\frac{1}{x}=3-\sqrt{2}$ ہو تو (i) $x+\frac{1}{x}$ اور (ii) $x-\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**.8** اگر $\frac{1}{p}=\sqrt{10}+3$ ہو تو (i) $(p+\frac{1}{p})^2$ اور (ii) $(p-\frac{1}{p})^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

**.9** مخرج کو ناطق بنایے۔ (i) $\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}$

# جائزہ مشق-1

-1 صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. ایک $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا الجبری جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ ہو جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں کہلاتا ہے۔

(a) ناطق عدد (b) ناطق جملہ
(c) مقدار اصم (d) مخلوط مقدار اصم

2. $(a+b)^2-(a-b)^2=?$

(a) $2(a^2+b^2)$ (b) $4ab$
(c) $-4ab$ (d) $a^2+b^2$

3. $(a+b)^2+(a-b)^2=?$

(a) $-4ab$ (b) $a^2+b^2$
(c) $4ab$ (d) $2(a^2+b^2)$

4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=?$

(a) $(a-b)^3$ (b) $(a+b)^3$
(c) $a^3-b^3$ (d) $a^3+b^3$

5. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=?$

(a) $a^3-b^3$ (b) $(a+b)^3$
(c) $(a-b)^3$ (d) $a^3+b^3$

6. $a^3+3ab(a+b)+b^3=?$

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a-b)^3$
(c) $a^3+b^3$ (d) $a^3-b^3$

7. $a^3-3ab(a-b)-b^3=?$

(a) $a^3+b^3$ (b) $(a+b)^3$
(c) $a^3-b^3$ (d) $(a-b)^3$

8. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذر کی علامت ہو، کہلاتا ہے

(a) مخلوط مقدار اصم (b) مقدار اصم
(c) ناطق عدد (d) قدرتی عدد

9. مقدار اصم $\sqrt{a} = a^{1/2}$ کا درجہ ہے۔

(a) $0$ (b) $1$

(c) $2$ (d) $\frac{1}{2}$

10. مقادیر اصم کو ضرب دی جاسکتی ہے اگر وہ ہوں۔

(a) یکساں درجہ کی (b) دو درجی

(c) مختلف درجوں کی (d) $n$ درجہ کی

II- خالی جگہ پر کریں۔

1. ایک $\frac{p}{q}$ کی شکل کا عدد جس میں $q \neq 0$ اور $p, q \in Z$ __________ کہلاتا ہے۔

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ اور $P(x), Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں، __________ کہلاتا ہے۔

3. $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ __________

4. $(a+b)^2 + (a-b)^2 =$ __________

5. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 =$ __________

6. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 =$ __________

7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$ __________

8. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$ __________

9. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذری علامت ہو کہلاتا ہے __________

10. $\sqrt{a} = a^{1/2}$ __________ درجہ کی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

# خلاصہ SUMMARY

## کلیے: Formulae

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a\pm b) \pm b^3$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مقدار اصم: مقدار اصم ایک غیر ناطق جملہ ہے جس میں جذری علامت پائی جاتی ہے۔

خالص مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک ناطق جز و ضربی ہو اور دوسرا اجز و ضربی غیر ناطق ہو۔

مخلوط مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک کے علاوہ کوئی ناطق جز و ضربی ہو جبکہ دوسرا اجز و ضربی غیر ناطق ہو۔ مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مشابہ مقدار اصم: مقدار اصم جن کا یکساں غیر ناطق جز و ضربی ہو، ہم شکل / یکساں مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

غیر مشابہ مقدار اصم: ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق اجزائے ضربی مختلف ہوں۔ مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

ناطق ساز جز و ضربی: دو ایسی مقادیر اصم کہ جن کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو دونوں ایک دوسرے کا ناطق ساز جز و ضربی کہلاتی ہیں۔