یونٹ

7 جیومیٹری کے بنیادی اصول

FUNDAMENTALS OF GEOMETRY

- زاویوں کی خصوصیات
- متماثل اور ایک جیسی اشکال
- چوکور
- متوازی خطوط
- متماثل مثلثیں
- دائرہ

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

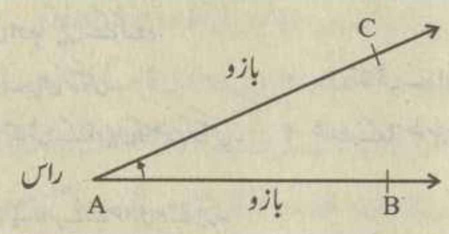
- متصلہ، سپلیمنٹری اور کمپلیمنٹری زاویوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- راسی متقابل کے زاویوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- نامعلوم متصلہ، کمپلیمنٹری، سپلیمنٹری اور راسی متقابل کے زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- مثلث کے نامعلوم زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- متوازی خطوط کی تعریف بیان کر سکیں۔
  - دو خطوط جو ایک دیے گئے خط کے متوازی ہوں ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
  - اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔
  - اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔
- اشکال کی مدد سے درج ذیل متوازی خطوط کی خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- دو متوازی خطوط کو قطع کرنے والا ایک ترچھا خط کھینچیے اور اس خط کے ایک ہی طرف متناظرہ زاویوں، متبادلہ اندرونی زاویوں، راسی متقابل کے زاویوں اور اندرونی زاویوں کو ظاہر کر سکیں۔
- جب ایک ترچھا خط دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو زاویوں کے جوڑوں کے درمیان درج ذیل تعلق بیان کر سکیں۔
  - متناظرہ زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ ترچھے خط کے ایک ہی طرف زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں انہیں اشکال سے بھی ظاہر کیجیے۔
- متماثل اور ایک جیسی اشکال کی شناخت کر سکیں۔
- دو مثلثوں کے درمیان متماثل ہونے کی خصوصیات کا اطلاق کر سکیں۔
  - $SSS \cong SSS$, • $SAS \cong SAS$, • $ASA \cong ASA$, • $RHS \cong RHS$,
- مربع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - مربع کے چاروں اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
  - مربع کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
  - مربع کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- مستطیل کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - مستطیل کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
  - مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
  - مستطیل کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- متوازی الاضلاع کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
  - متقابلہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔
  - متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
  - دائرہ، اس کے مرکز، رداس، قطر، کاڈ، قوس، بڑی قوس، چھوٹی قوس، نصف دائرہ اور دائرہ کے حصوں کو بیان کر سکیں۔
- درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
  - دائرہ کے ایک ہی حصہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں۔
  - دائرہ کی چھوٹی قوس کا مرکزی زاویہ متناظرہ بڑی قوس کے مرکزی زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔
- درج بالا خصوصیات کا جیومیٹری کی مختلف اشکال پر اطلاق کر سکیں۔

7.1 زاویوں کے خواص PROPERTIES OF ANGLES

زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے سے پہلے آیئے ہم پچھلی جماعتوں میں جو کچھ پڑھا اس کا اعادہ کریں۔

زاویہ Angle

زاویہ دو ایسی شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جو ایک مشترک نقطہ سے شروع ہوتی ہیں۔ یہ شعاعیں زاویے کے بازو اور مشترکہ نقطہ، زوایہ کا راس کہلاتا ہے۔



زاویہ کے نام یوں رکھے جاتے ہیں:

1- راس کے نام سے جیسا کہ $\angle A$

2- راس کے علاوہ دونوں بازوؤں کے ایک ایک نقطہ کو ساتھ ملا کر۔ اس میں نقطہ راس کو درمیان میں لکھا جاتا ہے۔

$\angle BAC$ یا $\angle CAB$

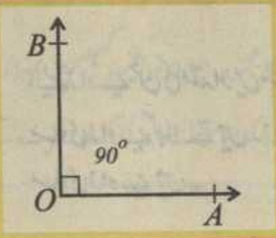
زاویہ مستقیم Straight Angle

زاویہ مستقیم 180^o کا ہوتا ہے اور یہ دو قائمہ زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔ زاویہ مستقیم کے دونوں بازو مخالف اطراف میں کھلتے ہیں اور ایک خط مستقیم بناتے ہیں۔

زاویہ قائمہ **Right Angle**

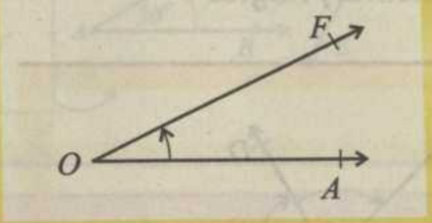
دی ہوئی شکل ایک قائمہ زاویہ کی ہے۔ قائمہ زاویہ 90^o کا ہوتا ہے۔

$m\angle AOB = 90^o$



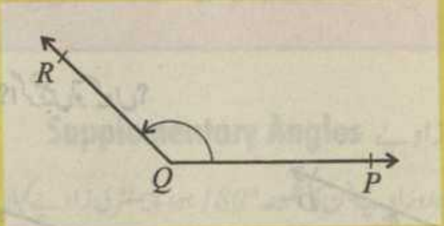
حادہ زاویہ **Acute Angle**

ایک حادہ زاویہ 0^o سے بڑا اور 90^o سے کم ہوتا ہے۔
زاویہ 'O' ایک حادہ زاویہ ہے۔



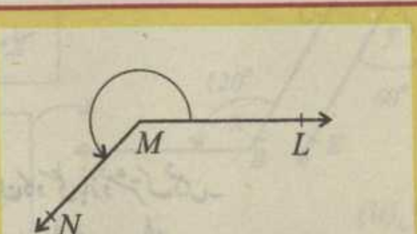
منفرجہ زاویہ **Obtuse Angle**

منفرجہ زاویہ 90^o سے بڑا اور 180^o سے چھوٹا ہوتا ہے۔ زاویہ Q ایک منفرجہ زاویہ ہے۔

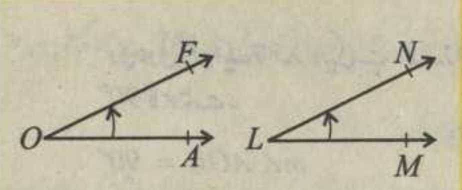


زاویہ منعکس **Reflex Angle**

زاویہ منعکس 180^o سے بڑا اور 360^o سے کم ہوتا ہے۔ زاویہ M ایک منعکس زاویہ ہے۔



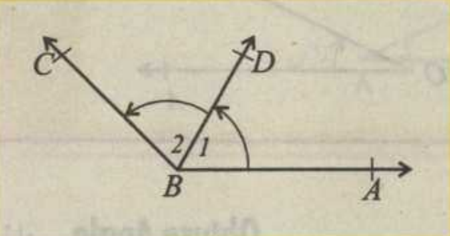
مساوی زاویے Equal Angles



ایسے زاویے جن کی مقداریں مساوی ہوں، مساوی زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویہ 'O' اور 'L' مساوی زاویے ہیں۔

7.1.1 متصلہ، کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویے Adjacent, Complementary and Supplementary Angles

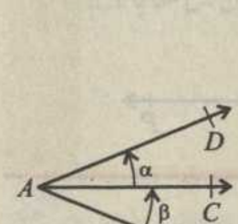
متصلہ زاویے Adjacent Angles



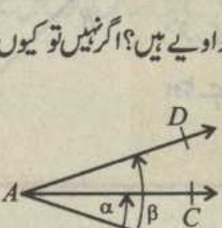
ایک ہی مشترکہ راس پر بننے والے دو زاویے جن کا ایک بازو مشترک ہو۔ دی گئی شکل میں 1∠ اور 2∠ دو متصلہ زاویے ہیں جن کا مشترک راس B اور مشترک بازو BD ہے۔

مثال:-

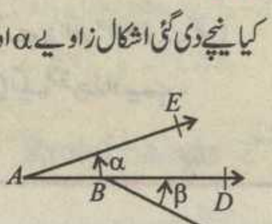
کیا نیچے دی گئی اشکال زاویے α اور β متصلہ زاویے ہیں؟ اگر نہیں تو کیوں؟



شکل (i)



شکل (ii)



شکل (iii)

حل:

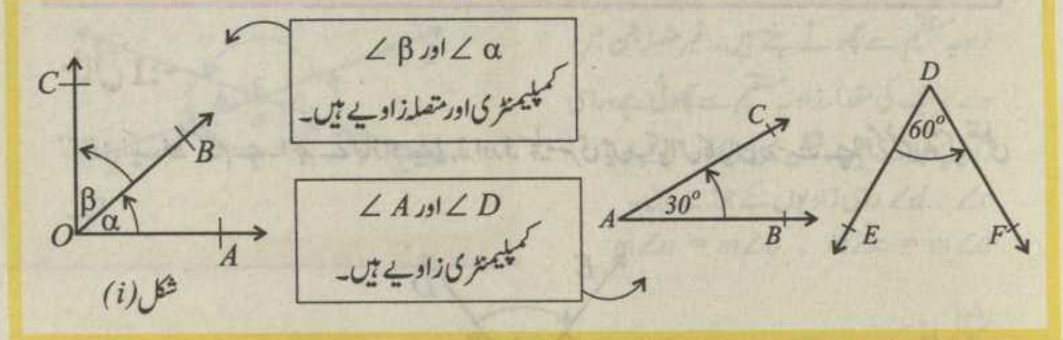
شکل (i) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے ہیں۔

شکل (ii) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے نہیں۔ کیونکہ ان کا وسطی بازو مشترک نہیں۔

شکل (iii) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے نہیں کیونکہ ان میں مشترک راس نہیں۔

کمپلیمنٹری زاویے **Complementary Angles**

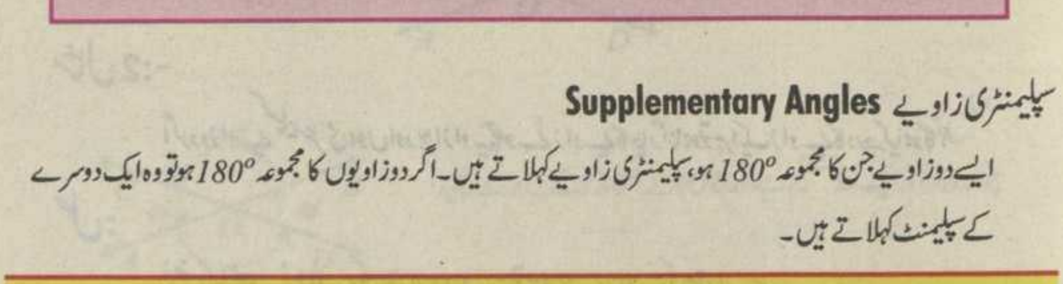
اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90^o ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ زاویہ قائمہ کے برابر یعنی 90^o ہو (ضروری نہیں کہ وہ متصلہ ہوں) ایک دوسرے کے کمپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔



نوٹ:
اگر دو زاویے متصلہ اور کمپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
شکل (i) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متصلہ اور کمپلیمنٹری ہیں پس $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$

سپلیمنٹری زاویے **Supplementary Angles**

ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180^o ہو، سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ 180^o ہو تو وہ ایک دوسرے کے سپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔



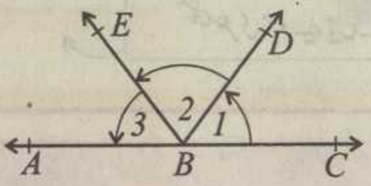
نوٹ:

اگر دو زاویے متصلہ اور سپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو خط مستقیم بناتے ہیں اور یوں ہی ہے۔

پچھلے صفحہ پر شکل (i) میں سے $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متصلہ اور سپلیمنٹری زاویے ہیں۔لہٰذا PQS ایک خط مستقیم ہے۔

مثال 1:-

ABC ایک خط مستقیم ہے۔امجد نے کہا زاویے 2،1 اور 3 سپلیمنٹری ہیں۔آیا اس کا بیان درست ہے؟ اگر نہیں تو کیا غلطی ہے؟



حل:

نہیں۔کیونکہ سپلیمنٹری زاویوں کی تعداد دو ہوتی ہے تین نہیں۔

مثال 2:-

اگر دو زاویے کمپلیمنٹری ہوں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے کا چار گنا ہو تو ہر ایک زاویے کا درجہ کیا ہوگا؟

حل:

فرض کیا چھوٹے زاویے کی مقدار x درجہ ہے تو $4x$ بڑے زاویے کی مقدار ہے۔

چونکہ x اور $4x$ کمپلیمنٹری ہیں۔

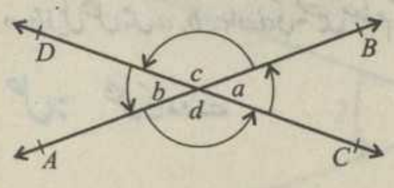
لہٰذا

$$x + 4x = 90^\circ$$
$$5x = 90^\circ$$
$$x = 18^\circ$$
$$4x = 72^\circ$$

پس مطلوبہ زاویے 18° اور 72° ہیں۔

7.1.2 راسی زاویے Vertical Angles

راسی زاویے ایسے دو زاویے ہوتے ہیں جو دو متقاطع خطوط سے بنتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک مقدار، زاویہ مستقیم سے کم ہوتی ہے۔

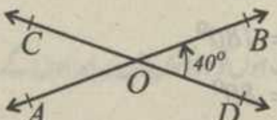


کسی ایک نقطہ پر سے متقاطع دو خطوط کھینچیے۔ کتنے زاویے، زاویہ مستقیم سے چھوٹے بنتے ہیں۔ غیر متصلہ جن میں سے ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے چھوٹی ہے، راسی زاویے کہلاتے ہیں۔ شکل میں $\angle a$ ، $\angle b$ اور $\angle c$, $\angle d$ راسی زاویوں کے جوڑے ہیں۔

$m\angle a = m\angle b \ , \ m\angle c = m\angle d$

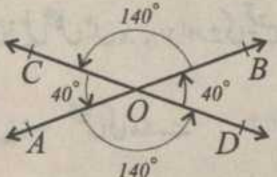
مثال:-

شکل میں نقطہ O پر دو متقاطع خطوط AB اور CD ہیں اور $m\angle BOD = 40^\circ$ بناتے ہیں۔ $\angle AOD$ اور $\angle AOC$ کی مقدار کیا ہوگی؟ آپ $\angle BOD$ اور $\angle COA$ کے متعلق کیا کہیں گے؟



حل:

چونکہ AOB ایک خط مستقیم ہے اور $\angle AOB$ 180° کے برابر ہے۔ لہٰذا



$m\angle AOD + m\angle BOD = 180^\circ$

$m\angle BOD = 40^\circ$ (معلوم)

$m\angle AOC = 40^\circ$ (معلوم میں دیا گیا $\angle BOD$ اور $\angle AOC$ سپلیمنٹری ہیں)

$m\angle AOD = 140^\circ$

$\because (140^\circ + 40^\circ = 180^\circ)$

$m\angle BOD = m\angle COA$

$\angle BOD$ اور $\angle COA$ راسی زاویے ہیں۔

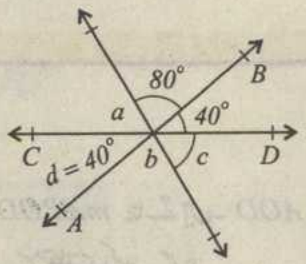
7.1.3 نامعلوم زاویے حل کرنا Calculate Unknown Angles

آیئے درج ذیل مثالوں میں نامعلوم زاویے کو متصلہ، کمپلیمنٹری، سپلیمنٹری اور راسی زاویوں کی مدد سے معلوم کریں۔

مثال 1:-

درج ذیل شکل میں c, b, a اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: شکل کی مدد سے



$$c + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$
$$c + 120^\circ = 180^\circ$$
$$c = 180^\circ - 120^\circ$$
$$c = 60^\circ$$

لیکن $c = a = 60^\circ$ (راسی زاویے)

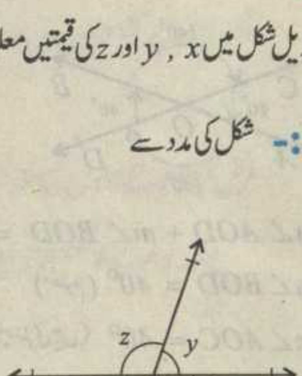
اب $a + d + b = 180^\circ$

$$60^\circ + 40^\circ + b = 180^\circ$$
$$100^\circ + b = 180^\circ$$
$$b = 80^\circ$$

مثال 2:-

درج ذیل شکل میں x ، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:- شکل کی مدد سے



$$x + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$
$$x + 110^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 110^\circ$$
$$x = 70^\circ$$

لیکن $x = y$ (راسی زاویے)

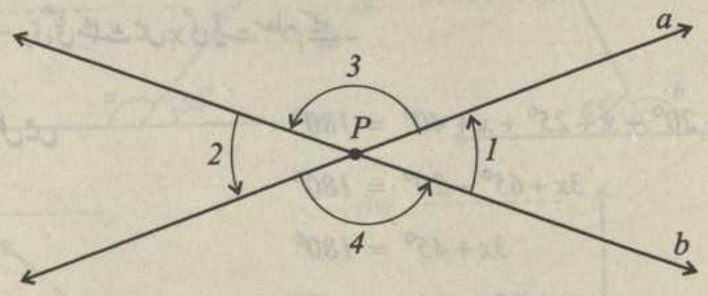
$$y = 70^\circ$$

اب $y + z = 180^\circ$

$$70^\circ + z = 180^\circ$$
$$z = 110^\circ$$

مسئلہ THEOREM

اگر دو خطوط مستقیم قطع کریں تو راسی زاویے برابر ہوتے ہیں۔



خطوط a اور b نقطہ P پر متقاطع ہیں اور ($\angle 1$ اور $\angle 2$) اور ($\angle 3$ اور $\angle 4$) راسی زاویوں کے جوڑے بناتے ہیں۔

اشارہ:
$\angle 1$ اور $\angle 2$ ایک ہی زاویہ کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں برابر ہوں گے۔

یاد رکھیے کہ:

- اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو خطوط مستقیم آپس میں قطع کریں تو راسی زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔

Calculate Unknown Angles of a Triangle

7.1.4 کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کو حل کرنا

کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کی مقدار معلوم کرنے کے لیے، ہم درج ذیل مثالوں کو مدنظر رکھتے ہیں اور پھر حل کرتے ہیں۔

مثال 1:- دی گئی مثلث میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

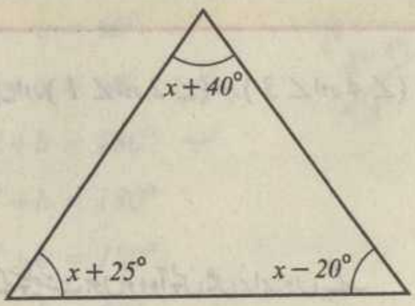
حل: شکل میں

$$x - 20^\circ + x + 25^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 65^\circ - 20^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 45^\circ = 180^\circ$$

$$3x = 135^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$



پس تینوں زاویے معلوم ہوتے ہیں۔ $x - 20^\circ = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

$$x + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$$

$$x + 40^\circ = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$$

مثال 2:- دی گئی مثلث میں x معلوم کریں۔

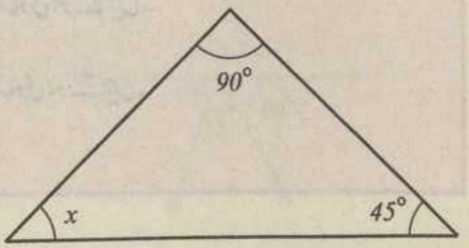
حل: ہم جانتے ہیں کہ

$$x + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x + 135^\circ = 180^\circ$$

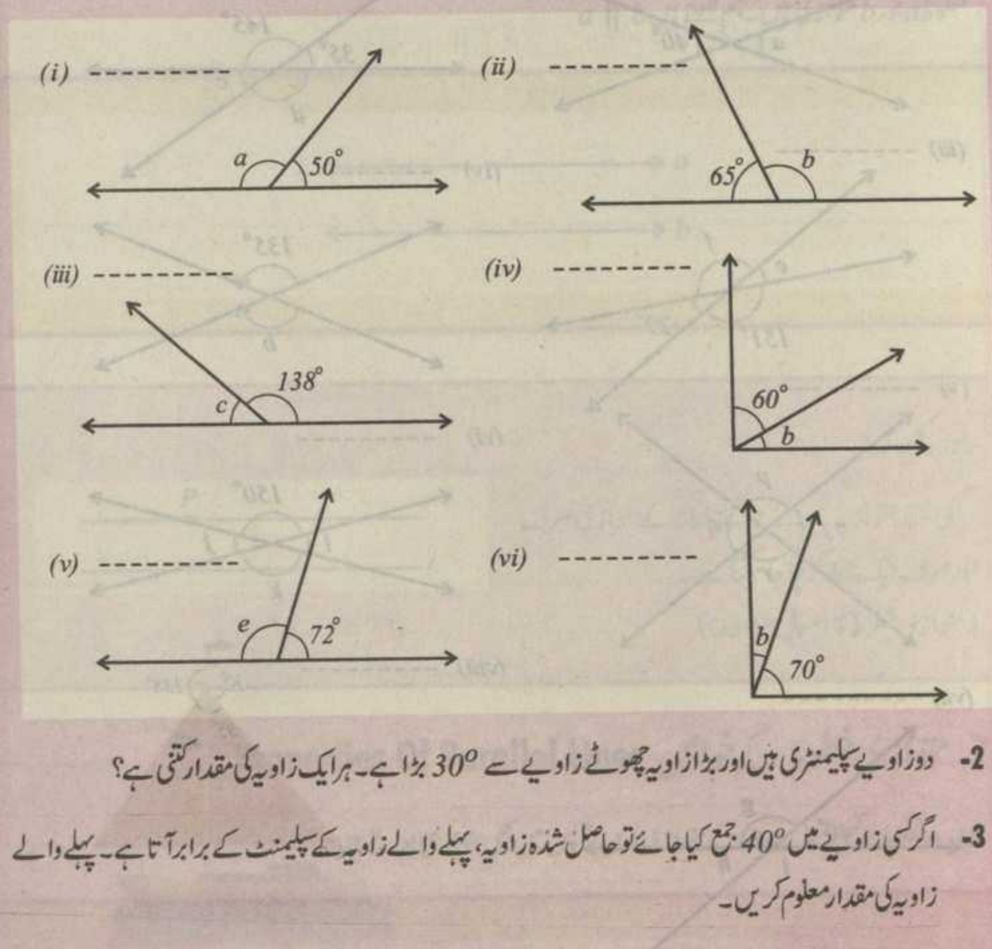
$$x = 180^\circ - 135^\circ$$

$$x = 45^\circ$$



مشق 7.1

-1 دیے گئے زاویوں کی مقداریں لکھیے اور دیکھیے کہ یہ کمپلیمنٹری ہیں یا کہ سپلیمنٹری؟



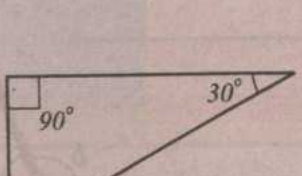
-2 دو زاویے سپلیمنٹری ہیں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے سے 30^o بڑا ہے۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار کتنی ہے؟

-3 اگر کسی زاویے میں 40^o جمع کیا جائے تو حاصل شدہ زاویہ، پہلے والے زاویہ کے سپلیمنٹ کے برابر آتا ہے۔ پہلے والے زاویہ کی مقدار معلوم کریں۔

-4 دو زاویوں کا مجموعہ 100^o ہے اور ان کے سپلیمنٹوں کا فرق 100^o ہے۔ زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

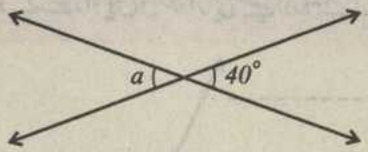
-5 دو زاویوں کا مجموعہ 100^o ہے پہلے زاویہ کا سپلیمنٹ دوسرے زاویے کے سپلیمنٹ سے 40^o زیادہ ہے۔ زاویے معلوم کیجیے۔

-6 دی گئی مثلث کی مساوات لکھ کر x معلوم کریں۔

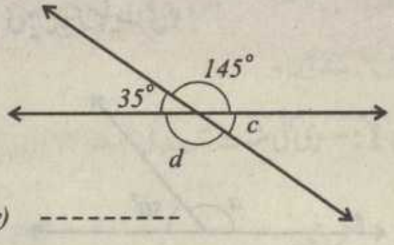


-7 حروف تہجی سے ظاہر شدہ زاویوں کی قیمتیں معلوم کریں۔

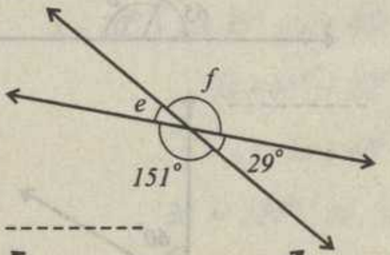
(i) ----------



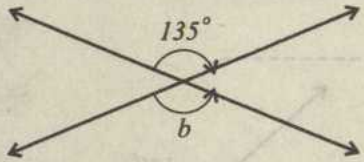
(ii) ----------



(iii) ----------

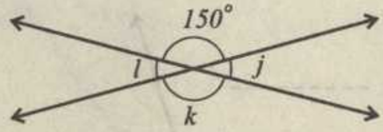


(iv) ----------

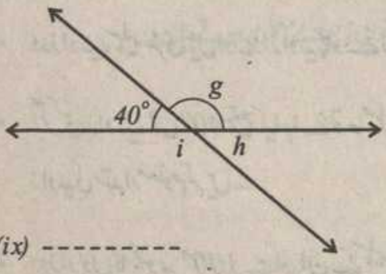


(v) ----------

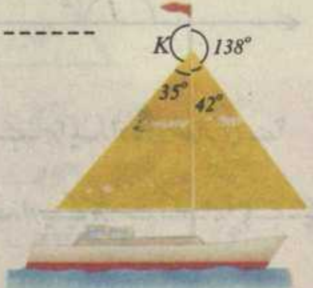
(vi) ----------



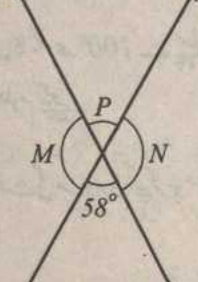
(vii) ----------



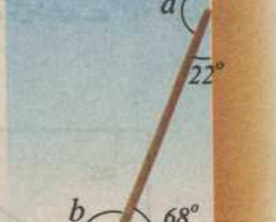
(viii) ----------



(ix) ----------



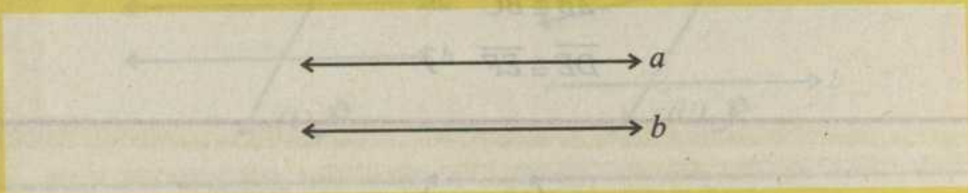
(x) ----------



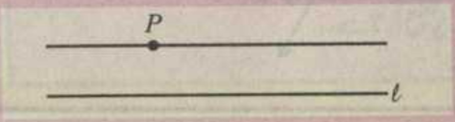
7.2 متوازی خطوط PARALLEL LINES

ایک ہی مستوی میں واقع ایسے دو خطوط جو کبھی نہ ملیں، متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

خطوط a اور b متوازی ہیں۔ ہم لکھتے ہیں $a \parallel b$



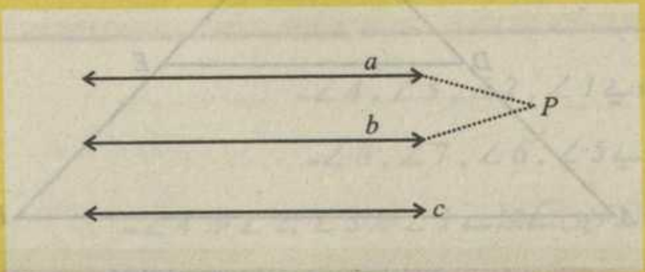
یاد رکھیے کہ:



کسی نقطہ P میں سے دیے گئے خط l کے متوازی صرف اور صرف ایک خط کھینچا جا سکتا ہے۔
(متوازی خطوط کا اصول موضوعہ)

7.2.1 متوازی خطوط کے خواص Properties Of Parallel Lines

a) دو خطوط جو کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں، آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔



خط 'a'، خط c کے متوازی ہے۔ خط b، خط c کے متوازی ہے تو خط a، خط b کے متوازی ہے۔ اگر $a||c$، $b||c$ تو $a||b$۔

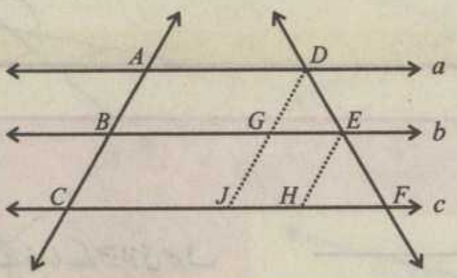
b) اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔

یعنی اگر $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$

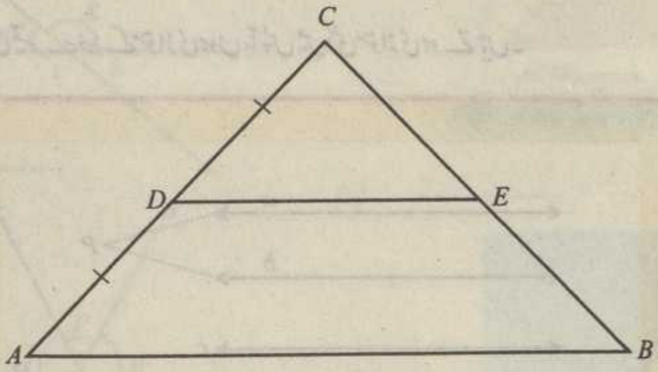
$\overline{AC}$ اور $\overline{DF}$ کوئی سے خط قاطع ہیں۔

اور $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

تو $\overline{DE} \cong \overline{EF}$



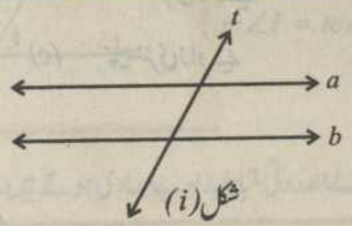
c) اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔

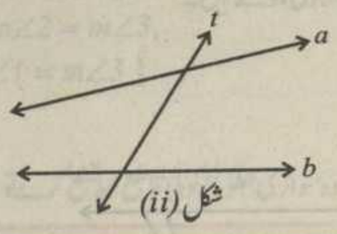


یعنی اگر ΔABC میں $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ہو تو $\overline{CE} \cong \overline{EB}$

7.2.2 قاطع خط Transversal

قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرے۔



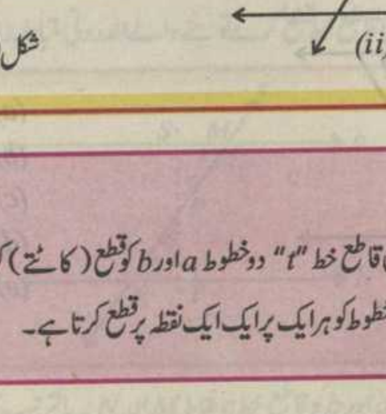


نوٹ:

شکل (i) اور (ii) میں قاطع خط "t" دو خطوط a اور b کو قطع (کاٹتے) کرتے ہیں۔

خط قاطع تین یا زیادہ خطوط کو ہر ایک پر ایک ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

اگر کوئی خط "t" دو متوازی خطوط a اور b کو قطع کرے تو بننے والے زاویوں کے نام درج ذیل طریقے سے دیے جاتے ہیں۔



1- چار اندرونی زاویے $\angle 1 , \angle 2 , \angle 3 , \angle 4$۔

2- چار بیرونی زاویے $\angle 5 , \angle 6 , \angle 7 , \angle 8$۔

3- دو اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 3$; $\angle 2$ اور $\angle 4$۔

4- دو بیرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے اور $\angle 5$ اور $\angle 7$; $\angle 6$ اور $\angle 8$۔

5- قاطع خط کے ساتھ ایک ہی جانب والے اندرونی زاویوں کے جوڑے $\angle 2$ اور $\angle 3$; $\angle 1$ اور $\angle 4$۔

6- متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے $\angle 2$ اور $\angle 6$; $\angle 1$ اور $\angle 5$ اور $\angle 3$ اور $\angle 7$; $\angle 4$ اور $\angle 8$۔

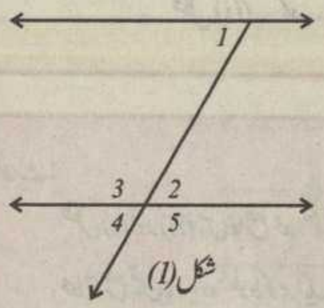
مثال:- نیچے دی گئی اشکال کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

(a) اندرونی متبادلہ زاویے (b) متناظرہ زاویے

(c) کمپلیمنٹری زاویے (d) راسی زاویے

(e) سپلیمنٹری زاویے

حل:



شکل (1)

شکل 1 میں

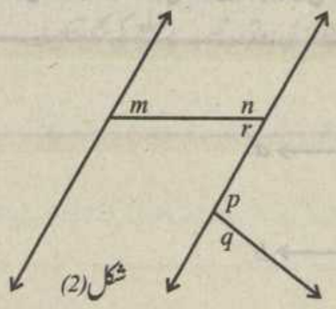
(a) $\angle 1, \angle 2$

(b) $\angle 1, \angle 4$

(c) کوئی نہیں

(d) $\angle 3, \angle 5; \angle 2, \angle 4$

(e) $\angle 3, \angle 2; \angle 2, \angle 5; \angle 5, \angle 4; \angle 4, \angle 3$



شکل (2)

شکل 2 میں

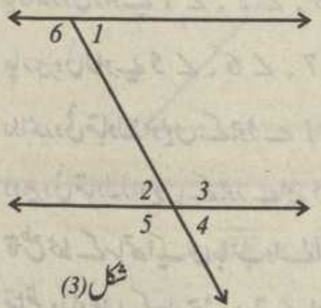
(a) $\angle m, \angle r; \angle r, \angle p$

(b) کوئی نہیں

(c) کوئی نہیں

(d) کوئی نہیں

(e) $\angle n, \angle r; \angle p, \angle q$



شکل (3)

شکل 3 میں

(a) $\angle 1, \angle 2 ; \angle 3, \angle 6$

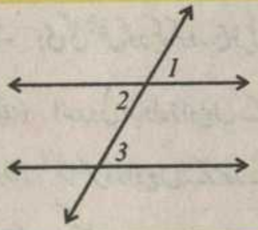
(b) $\angle 1, \angle 4 ; \angle 5, \angle 6$

(c) کوئی نہیں

(d) $\angle 2, \angle 4 ; \angle 3, \angle 5$

(e) $\angle 2, \angle 3 ; \angle 3, \angle 4 ; \angle 4, \angle 5 ; \angle 2, \angle 5$

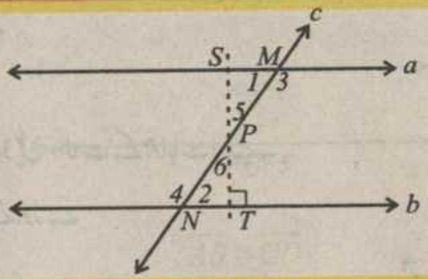
7.2.3 زاویوں کے جوڑوں میں تعلق Relation Between the Pairs of Angles



اگر دو متوازی خطوط کو کوئی خط قطع کرے تو اس سے بننے والے متناظرہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

[$m\angle 1 = m\angle 2,\ m\angle 2 = m\angle 3,$
$\therefore\ m\angle 1 = m\angle 3$]

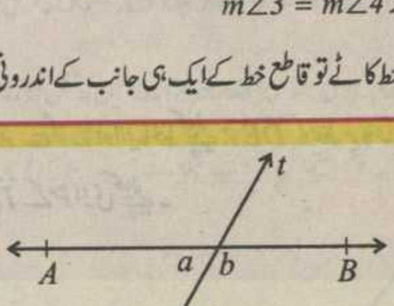
d) اگر دو متوازی خطوط کو کوئی قاطع خط قطع کرے تو بننے والے اندرونی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



$a \| b$ دو متوازی خطوط a اور b کو قاطع خط c نقاط M اور N پر بالترتیب کاٹتا ہے جس سے متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے $(\angle 1\ ,\ \angle 2)$ اور $(\angle 3\ ,\ \angle 4)$ بنتے ہیں۔

تو $m\angle 1 = m\angle 2$ اور $m\angle 3 = m\angle 4$

e) اگر دو متوازی خطوط کو قاطع خط کاٹے تو قاطع خط کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔



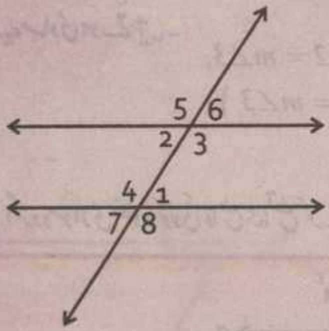
$AB \| CD$ دو متوازی خطوط کو قاطع خط t کاٹتا ہے۔

زاویے a، b، c اور d بنتے ہیں۔

$$m\angle b + m\angle d = 180^\circ$$
$$m\angle a + m\angle c = 180^\circ$$

مشق 7.2

-1 دِی گئی شکل کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

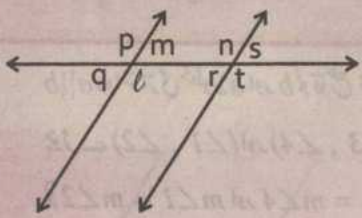
(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

-2 دِی گئی شکل کو دیکھیے اور درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

-3 خط $\overline{DE}$ سے باہر نقطہ لیجیے۔ X سے گزرتا ہوا ایسا خط کھینچیے جو $\overline{DE}$ کو نقطہ پر کاٹتا ہوا متماثل متناظرہ زاویے بناتے ہوئے اس نقطہ میں $\overline{DE}$ کے متوازی کھینچیے۔

نوٹ کیجیے کہ:

اگر کوئی قاطع خط دو ہم مستوی خطوط کو کاٹے اور ان کے ساتھ دو اندرونی سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے بنائے تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

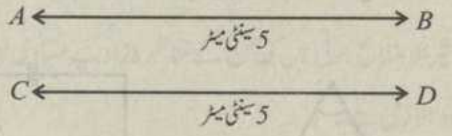
7.3 متماثل اور متشاکل اشکال CONGRUENT AND SIMILAR FIGURES

7.3.1 متماثل اشکال Congruent Figures

لفظ ''متماثل'' لاطینی لفظ ہے جس کے معنی ''باہم رضامند'' ہیں۔ دو ہندسی اشکال جن کی جسامت یکساں اور ہم شکل ہوں متماثل کہلاتی ہیں۔

ایک شکل دوسری شکل کے متماثل ہے۔ متماثل کی علامت $\cong$ ہے۔ پس دو خط متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں گی۔

شکل (i)

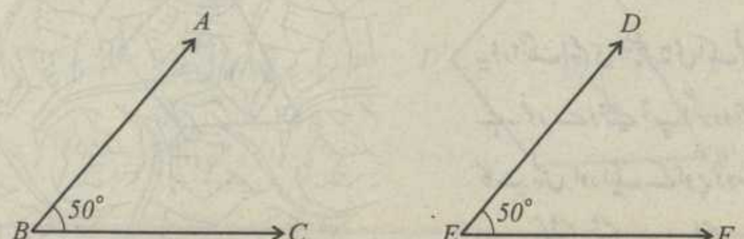


$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

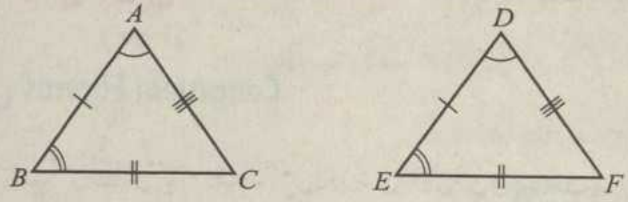
تمام قطع خط سیدھے ہونے کی بنیاد پر ہم شکل ہوتے ہیں۔ ان کی جسامت یکساں ہوگی اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں۔

مندرجہ بالا شکل میں سینٹی میٹر 5 $= m\overline{AB} = m\overline{CD}$ لہٰذا $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کی ایک جیسی جسامت کے ہیں۔

- دو قطعات جن کی لمبائیاں برابر ہوں متماثل قطعات کہلاتے ہیں۔ شکل (i) میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- دو زاویے مقدار میں برابر ہوں تو وہ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔ $\angle ABC \cong \angle DEF$



◀ مثلثان جن کے متناظرہ حصے متماثل ہوں، متماثل مثلثان کہلاتی ہیں۔

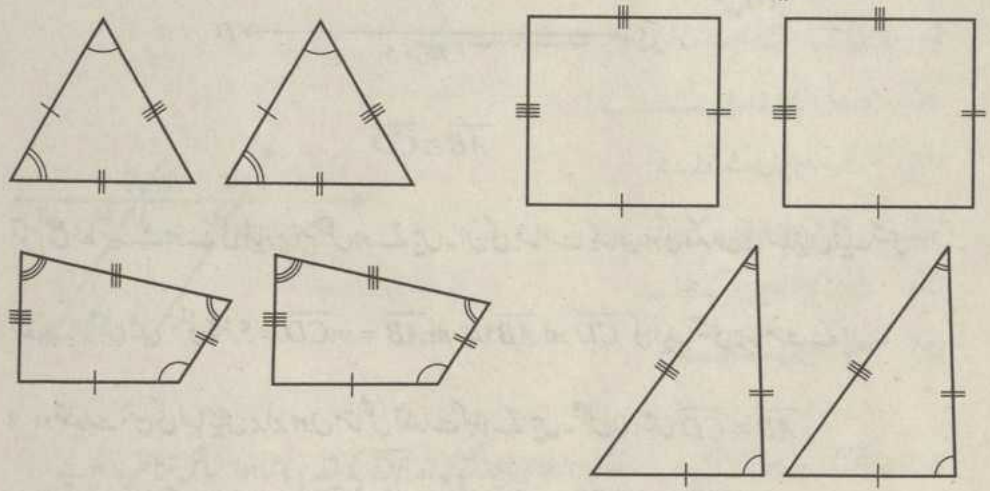


$$\overline{AB} \cong \overline{DE}\ ,\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\ ,\ \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

اور $m\angle A = m\angle D\ ,\ m\angle B = m\angle E\ ,\ m\angle C = m\angle F$

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$$

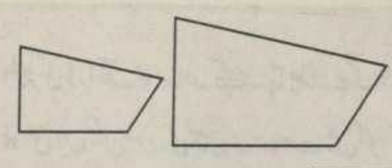
دو کثیر الاضلاع جن کے راسوں کے جوڑے اس طرح بنائے جائیں کہ متناظرہ زاویے اور اضلاع متماثل ہوں تو وہ متماثل کثیر الاضلاع کہلاتی ہیں۔



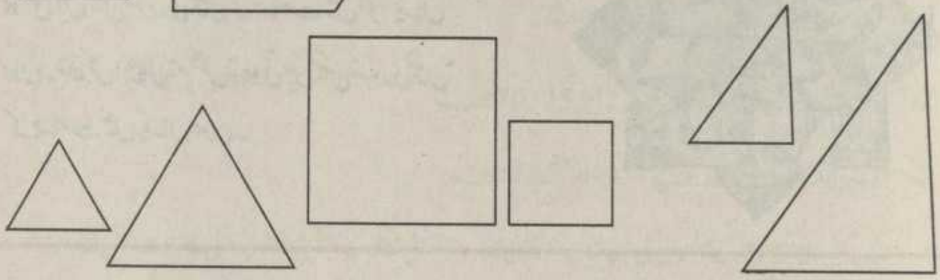
یہ ڈرائنگ ایم سی ایسچر نامی ایک فن کار نے بنائی ہے۔ غور سے دیکھیے آپ اگر دو ہم شکل حصوں کو کاٹ لیں اور ایک کے اوپر دوسرے کو رکھیں تو دوسرے کو ٹھیک ٹھیک چھپا لے گا۔

متماثل اشکال سائز اور شکل میں ایک جیسی ہوتی ہے۔

متشاکل اشکال Similar Figures



نیچے دی گئی کثیر الاضلاع میں ہر جوڑا آپس میں متشاکل ہے۔

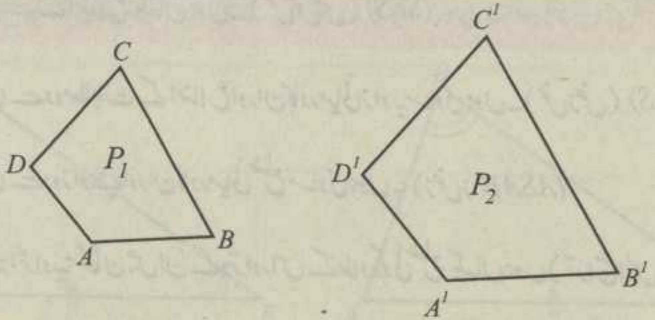


متشاکل کثیر الاضلاع ایسی کثیر الاضلاع ہوتی ہیں کہ جن کے متناظرہ زاویے مساوی اور متناظرہ اضلاع تناسب میں ہوں۔
یاد رہے کہ دونوں شرائط کا ہونا لازمی ہے۔

چونکہ تعریف کا عکس بھی درست ہے لہٰذا اس سے یہ عیاں ہے کہ اگر دو کثیر الاضلاع متشاکل ہوں تو ان کے متناظرہ زاویے مساوی ہوتے ہیں اور ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

تشاکل، تماثل کی طرح ایک خاص قسم کی مطابقت میں ہوتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع P_1، کثیر الاضلاع P_2 کے متشاکل ہو $P_1 \sim P_2$ لکھا جاتا ہے۔



1- $m\angle A = m\angle A^1,\ m\angle B = m\angle B^1$
$m\angle C = m\angle C^1,\ m\angle D = m\angle D^1$

2- $\dfrac{AB}{A^1B^1} = \dfrac{BC}{B^1C^1} = \dfrac{CD}{C^1D^1} = \dfrac{DA}{D^1A^1}$

ایسچر کی ڈرائنگ کا مطالعہ کیجئے۔ پتا چلتا ہے کہ اشکال ہم شکل تو ہو سکتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں بھی یکساں ہوں۔ تشاکل اشکال ہم شکل تو ہوتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں یکساں ہوں۔

7.3.2 علامت (≅) Symbol

علامت (≅) دو ہندسی اشکال جن کی جسامت اور شکل یکساں ہوں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ تماثل کی علامت (≅) ہے۔

7.3.3 تماثل کی خصوصیات

1. متماثل اشکال ہر لحاظ سے یکساں ہوتی ہیں یعنی کہ ان کی شکل یکساں اور جسامت بھی یکساں ہوتی ہے۔

2. مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ان پر درج ذیل میں سے کوئی ایک بھی شق لاگو ہو۔

(a) مطابقت کے اضلاع یکساں ہوں۔ (ض ض ض) *(SSS)*

(b) کوئی سے دو مطابقت کے اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ مساوی ہوں۔ (ض ز ض) *(SAS)*

(c) کوئی سے دو زاویے اور ان کا درمیانی ضلع مساوی ہوں۔ (ز ض ز) *(ASA)*

(d) قائمۃ الزاویہ مثلثان میں ان کے وتر اور اس کے علاوہ کوئی ضلع یکساں ہوں (آر ایچ ایس) *(RHS)*

3. دائرے جن کے رداس متماثل ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

4. دو زاویے جن کی پیائش یکساں ہو۔ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔

مشق 7.3

سوال 1 - 3 تک کیا بننے والی اشکال متشاکل ہیں؟

-1 تمام مربع، تمام مستطیل، تمام باقاعدہ مسدسیں

-2 دو مستطیلیں جن کے اضلاع 8 ,12 اور 15 ,10 ہوں۔

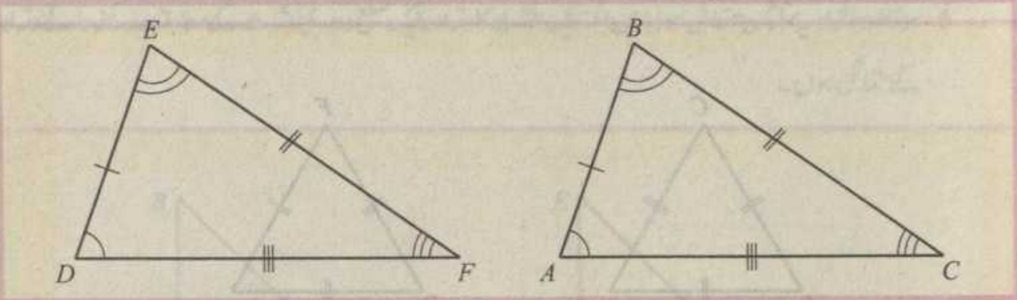
-3 دو معین اشکال جن کے زاویے 35° اور 125° ہوں۔

-4 ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی لمبائیاں 8 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 9 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل کثیر الاضلاع 6 سینٹی میٹر لمبے ضلع کے مطابق ضلع کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔ دوسری کثیر الاضلاع کے باقی ضلعوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

-5 ایک چوکور میں اضلاع کی لمبائیاں 2 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل چوکور میں سب سے بڑے ضلع کی لمبائی 21 سینٹی میٹر ہے۔ دوسرے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔

-6 ایک کثیر الاضلاع کے اضلاع کی لمبائیاں 5 سینٹی میٹر، 2 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل اضلاع کے فیصلوں کی لمبائیاں معلوم کریں جبکہ پہلی والی کے 2 سینٹی میٹر لمبائی والے ضلع کے مقابلہ میں اس کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو۔ دونوں کثیر الاضلاع احاطوں میں کیا نسبت ہوگی؟

-7 درج ذیل شکل میں متناظرہ اضلاع اور زاویوں کے جوڑوں کے نام لکھیے جو آپس میں متماثل ہیں۔



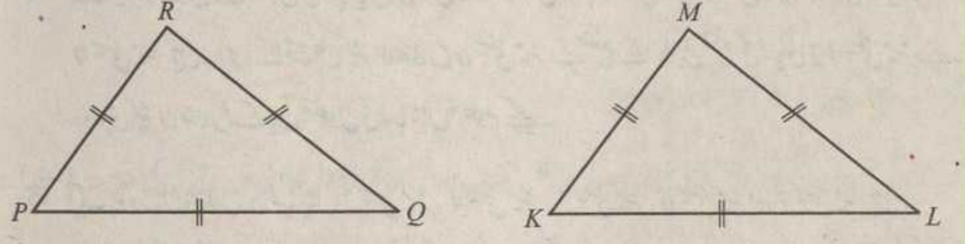
-8 کیا تمام متشاکل اشکال متماثل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

-9 کیا تمام متماثل اشکال متشاکل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

7.4 متماثل مثلثان CONGRUENT TRIANGLES

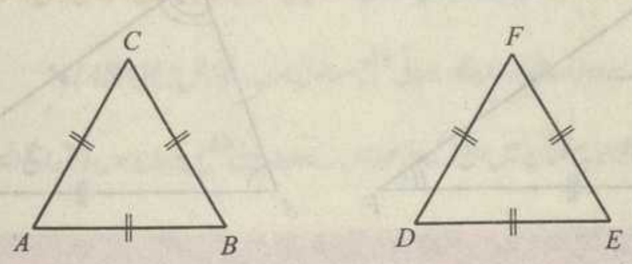
دو ایسی مثلثان متماثل مثلثان ہوتی ہیں کہ جن کے راسوں کے جوڑے بنانے کے بعد اگر ان کے متناظرہ حصوں کی مطابقت لی جائے (زاویوں اور ضلعوں کی) تو وہ برابر ہوتے ہیں۔

نیچے شکل کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔ $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ جس کا مطلب ہے مثلث PQR مثلث KLM کے متماثل ہے۔



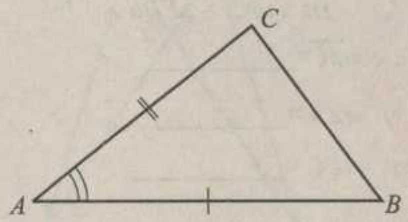
دو مثلثان کے درمیان تماثل کی خصوصیات

- کسی دی گئی مطابقت میں دو مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر پہلی مثلث کے تمام اضلاع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے تمام اضلاع کے برابر ہوں۔ (ض ض ض $\cong$ ض ض ض) $(SSS \cong SSS)$

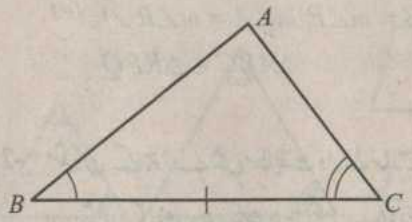


درج بالا شکل میں ΔABC اور ΔDEF متماثل ہیں۔

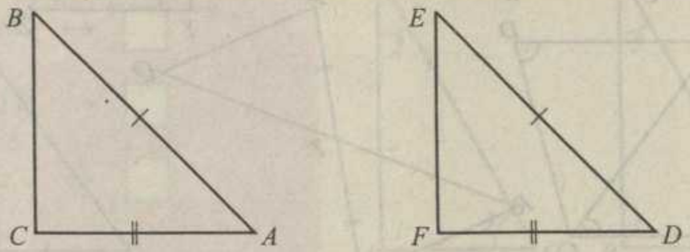
◄ دو مثلثات آپس میں متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ، دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ کے برابر ہوں۔ (ض زض ≅ ض زض) $(SAS \cong SAS)$



◄ دو مثلثات متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور درمیانی ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھتے دو زاویوں اور ان کے درمیانی ضلع کے متماثل ہوں۔ (زض ز ≅ زض ز) $(ASA \cong ASA)$



◄ دو قائمۃ الزاویہ مثلثات متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے وتر اور ضلع کے متماثل ہوں۔



مشق 7.4

-1 خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(a) اگر $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ ہوتو

(i) $m\overline{AB}=$__________ (ii) $m\overline{BC}=$__________

(iii) $m\overline{AC}=$__________ (iv) $m\angle A=$__________

(v) $m\angle B=$__________ (vi) $m\angle C=$__________

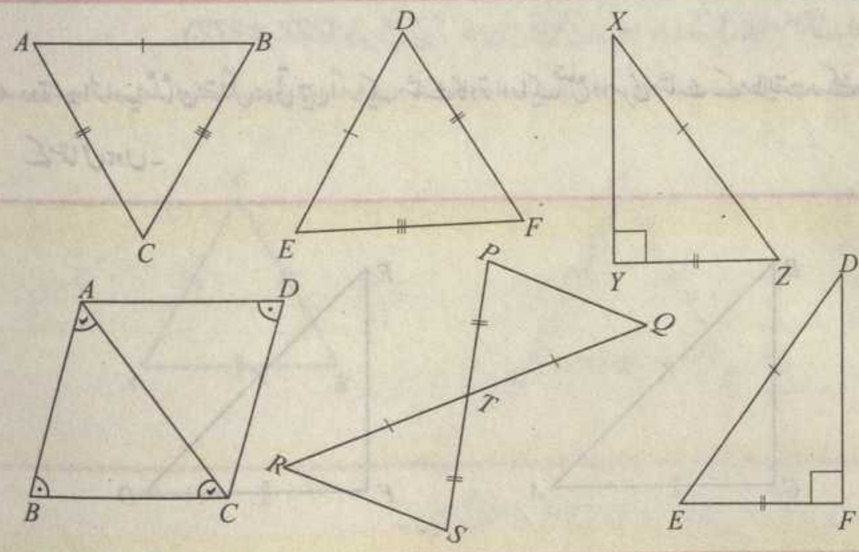
(b) مثلث PQR میں اضلاع PR اور QR کا درمیانی زاویہ __________ ہے۔

(c) مثلث DEF میں $\angle E$ اور $\angle F$ کے درمیان والا ضلع __________ ہے۔

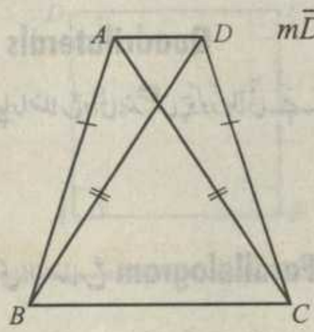
(d) اگر $m\overline{BC}=m\overline{PR},\ m\angle B=m\angle P,\ \overline{AB}=\overline{QP}$ تو تماثل کی حالت __________ کی رو سے $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

(e) اگر $m\angle A=m\angle R,\ m\angle B=m\angle P$ اور $m\overline{AB}=m\overline{RP}$ تو __________ تماثل کی رو سے $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

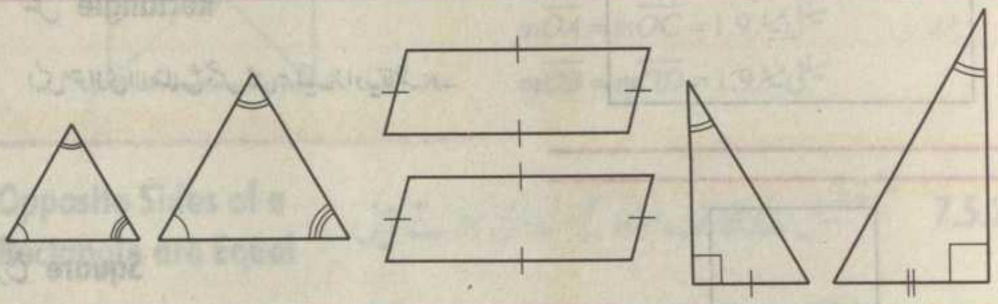
-2 مثلثان کے جوڑے میں مطابقت والے سارے جوڑے ایک جیسے نشانوں سے نشان زدہ کیے گئے ہیں۔ ان مثلثان کی نشاندہی کیجیے جو متماثل بن جاتی ہیں۔ ان کے تماثل کی علامات بھی لکھیے۔



3- شکل میں ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر دو مثلثان ہیں اس طرح سے کہ $m\overline{AB} = m\overline{DC}$ اور $m\overline{DB} = m\overline{AC}$ جبکہ A اور D، BC ایک ہی جانب واقع ہیں۔ مثلثان ADB اور DAC میں متناظرہ مطابقت والے حصے اس طرح لکھیں کہ ان میں تماثل قائم ہو آپ اس تماثل کے لیے کونسی حالت کہیں گے؟ اگر $m\angle BAD = 100^\circ$ اور $m\angle DCA = 40^\circ$ تو $\angle ADB$ کی مقدار معلوم کریں۔



4- ان اشکال میں تماثل، متشاکل یا کوئی نہیں، کے تعلق کی نشاندہی کیجیے۔



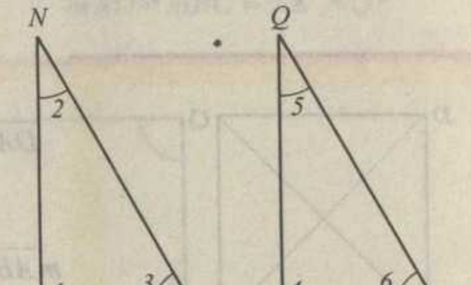
5- مثلثان ΔMNO اور ΔPQR میں مطابقت والے حصوں کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\overline{MN} \leftrightarrow$ ☐

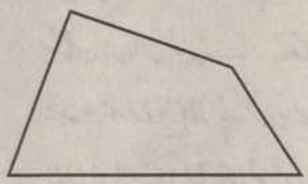
(ii) $\overline{NO} \leftrightarrow$ ☐

(iii) $\overline{PR} \leftrightarrow$ ☐

(iv) $\angle 1 \leftrightarrow$ ☐

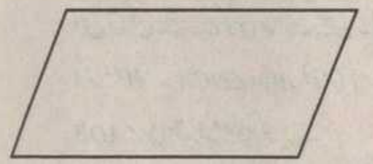


7.5 چوکور QUADRILATERALS



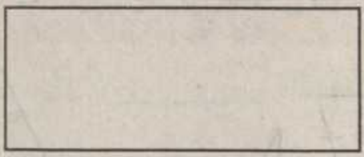
چوکور Quadrilaterals

چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔



متوازی الاضلاع Parallelogram

متوازی الاضلاع ایسی چوکور جس کے متوازی اضلاع کے دو جوڑے ہوں۔



مستطیل Rectangle

ایسی متوازی الاضلاع جس میں ہر ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع Square

مربع ایسی مستطیل ہے جس میں تمام اضلاع مساوی ہوں۔

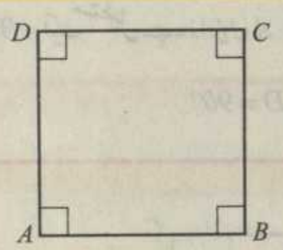
7.5.1 متماثل کے خواص Properties of Congruency

مربع کے چاروں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

ABCD ایک مربع ہے۔ $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کی پیائش کیجیے۔ ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{DA} = 2.8$ سینٹی میٹر

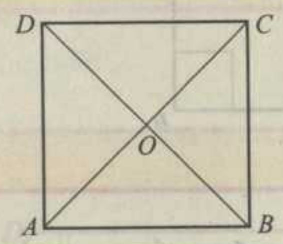
مربع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں



ABCD ایک مربع ہے۔ A، B، C اور D زاویوں کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیمائش کیجیے۔ تو ہمیں پتا چلتا ہے۔

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^o$$

مربع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں



مشکل میں ABCD ایک مربع لیجیے۔ اس کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ پیمائش سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 1.9$ سینٹی میٹر اور

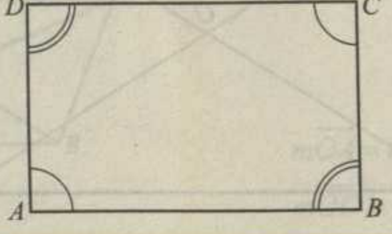
$m\overline{OB} = m\overline{OD} = 1.9$ سینٹی میٹر

7.5.2 مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں
Opposite Sides of a Rectangle are Equal

شکل میں ایک مستطیل ABCD دیکھیے۔ $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$ ، $\overline{CD}$ دو مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔

پیمائش سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

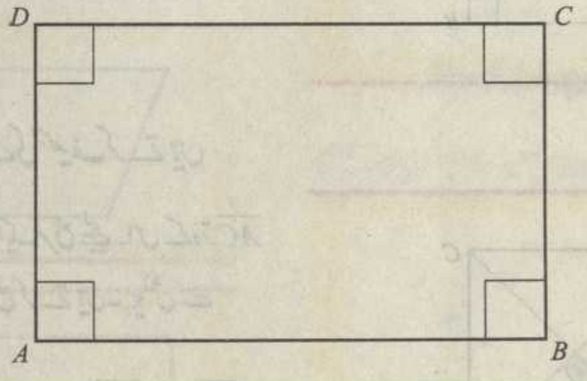
$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.8$ سینٹی میٹر $\quad$ $m\overline{AB} = m\overline{CD} = 4.5$ سینٹی میٹر



مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں

$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔ زاویوں A, B, C اور D کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیائش کرنے پر پتا چلتا ہے کہ

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^o$$

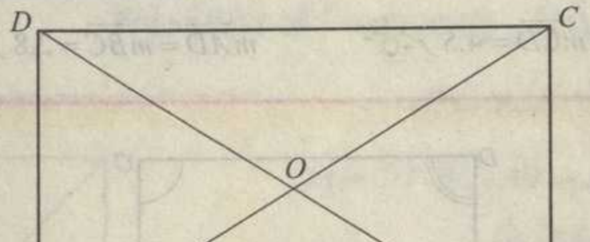


مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

$ABCD$ ایک مستطیل ہے۔ اس کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔

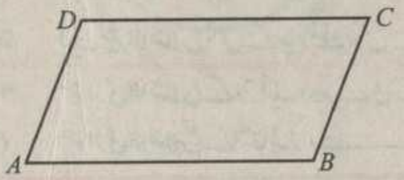
پیائش سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5$ سینٹی میٹر

اور $m\overline{OB} = m\overline{OD} = 2.5$ سینٹی میٹر



7.5.3 متوازی الاضلاع کے خواص Properties of a Parallelogram

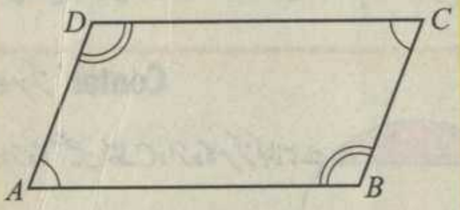
- متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔



متوازی الاضلاع $ABCD$ میں $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔
پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{AB} = m\overline{CD} = 3.9$ سینٹی میٹر اور
$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.0$ سینٹی میٹر

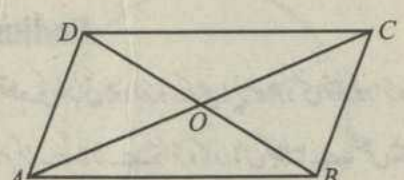
- متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



$ABCD$ متوازی اضلاع ہے اور مخالف زاویوں $\angle A$, $\angle C$ اور $\angle B$, $\angle D$ کے جوڑے ہیں۔
پیمائش کرنے سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$m\angle A = m\angle C = 70^o$ اور
$m\angle B = m\angle D = 110^o$

- متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



$ABCD$ متوازی الاضلاع کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے کو نقطہ O قطع کرتے ہیں۔
پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5$ سینٹی میٹر اور
$m\overline{OD} = m\overline{OB} = 2.5$ سینٹی میٹر

مشق 7.5

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) ایک متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو ________ کہلاتی ہے۔

(ii) ایک مساوی الاضلاع مستطیل ________ کہلاتی ہے۔

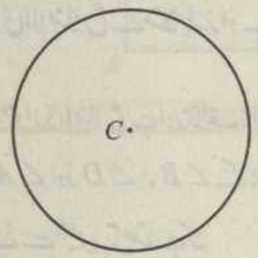
(iii) ایک کثیر الاضلاع جس کے چار ضلعے ہوں ________ کہلاتی ہے۔

(iv) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی ________ کرتے ہیں۔

(v) متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے ________ ہوتے ہیں۔

7.6 دائرہ CIRCLE

7.6.1 دائرہ Circle

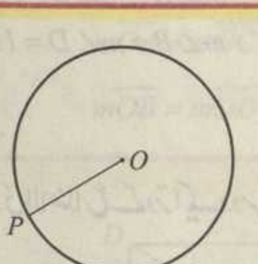


دائرہ مستوی کے ان نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔

جن کا ایک متعین نقطہ سے فاصلہ یکساں رہتا ہے۔

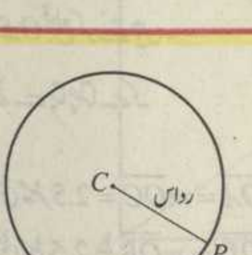
دائرہ کا مرکز Center

دائرہ کا متعین نقطہ C دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔



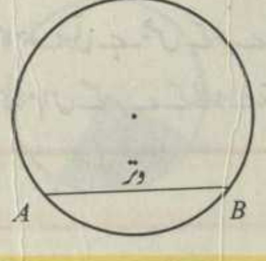
رداسی قطعہ Radial Segment

دائرہ کے محیط پر P ایک نقطہ ہے۔ دائرہ کا مرکز O ہے تو $\overline{OP}$ دائرہ کا رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔



رداس Radius

اس قطعہ کی لمبائی جو دائرہ کے محیط پر موجود کسی نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دائرہ کا رداس کہلاتا ہے۔ شکل میں $m\overline{CP}$ دائرہ کا رداس ہے۔ عام طور پر اسے 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



وتر Chord

کوئی بھی قطعہ جو دائرہ کے دو نقاط کو ملائے دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔ شکل میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے۔

دائرہ کا قطعہ Segment of a Circle

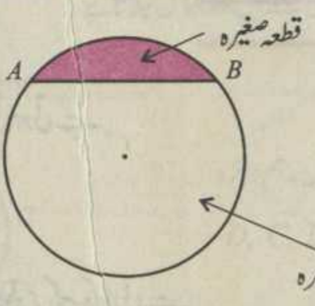
دائرہ کا وتر دائرے کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ یہ حصے دائرے کا قطعات کہلاتے ہیں۔

قطعہ صغیرہ Minor Segment

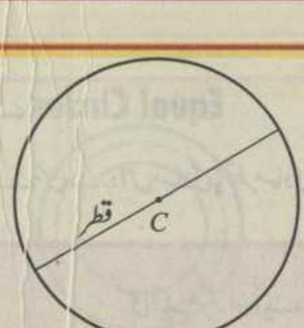
قوس صغیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ صغیرہ کہتے ہیں۔

قطعہ کبیرہ Major Segment

قوس کبیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ کبیرہ کہتے ہیں۔



قطر Diameter

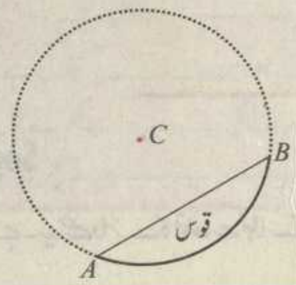


ایسا وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرے دائرہ کا قطر کہلاتا ہے۔ کسی دائرے کے قطر کی لمبائی اس کے رداس کا دوگنا ہوتی ہے۔

قطر = 2 × رداس

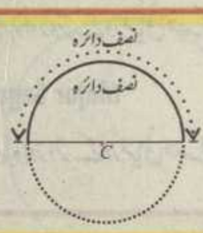
قوس Arc

قوس دائرہ کا حصہ ہوتی ہے۔ جس کے سرے دائرہ پر ہوتے ہیں اور درمیانی حصہ دائرہ کے نقاط کا سیٹ ہوتی ہے۔
قوس صغیرہ کا نام اس کے سرے کے نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ قوس AB کو $(\widehat{AB})$ شکل میں لکھا گیا ہے۔



نصف دائرہ Semi Circle

ایک نصف دائرہ جو ایک دائرہ کا آدھا ہوتا ہے نصف دائرہ کہلاتا ہے۔



قوس صغیرہ Minor Arc

قوس صغیرہ نصف دائرے سے چھوٹی ہوتی ہے۔

قوس کبیرہ Major Arc

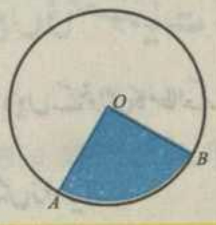
ایسی قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

مساوی دائرے Equal Circles

ایسے دائرے جن کے رداس مساوی یا قطر مساوی ہوں مساوی دائرے کہلاتے ہیں۔

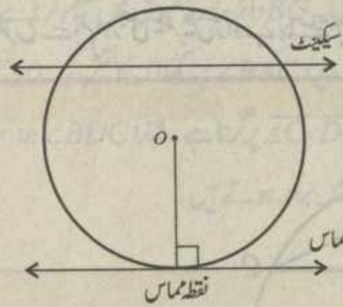
کسی ایک مرکز اور ایک رداس سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنایا جاسکتا ہے۔

7.6.2 سیکٹر Sector



دائرہ کے کوئی دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائرہ کا علاقہ، دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔ شکل میں AOB علاقہ، O مرکز کے ساتھ دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔

خط قاطع Secant Line



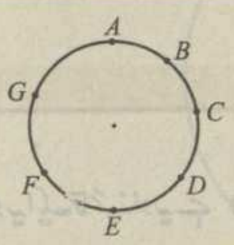
ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو اس کے دو نقاط پر قطع کرے دائرہ کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

مماس Tangent

مماس ایسا خط ہوتا ہے جو دائرے کے رداس کے بیرونی نقطہ پر عمود ہوتا ہے۔

دائرہ کا وہ نقطہ جہاں رداس اور مماس آپس میں ملتے ہیں نقطہ تماس کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط Concyclic Points



وہ تمام نقاط جو دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔ ہم دائرہ نقاط کہلاتے ہیں، دی گئی شکل میں نقاط $A, B, C, D,$ $E, F,$ اور G سب ہم دائرہ نقاط ہیں۔

ہم مرکز دائرے Concentric Circles

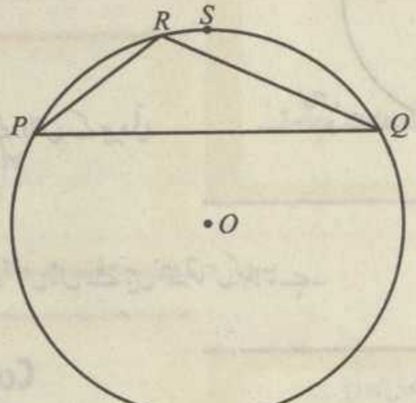
ایسے ہم مستوی دائرے جو ہم مرکز ہوں اور جن کے رداس مختلف ہوں۔ ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں، تین ہم مرکز دائروں کا سیٹ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

7.6.3 زاویوں کی خصوصیات Properties of Angles

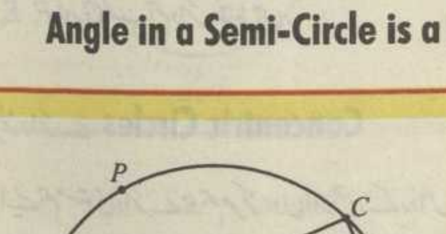
دائروں میں زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے کے لیے سب سے پہلے دائرے کے قطع میں زاویہ کو سمجھنا ضروری ہے۔

دائرے کے قطعہ میں زاویہ:

'O' مرکز والے دائرہ کا قاطع $\overline{PQ}$ ہے جو کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ O مرکز والے دائرہ کا قطعہ PSQ لیتے ہیں اس پر R کوئی نقطہ لے کر P اور Q سے R کو ملاتے ہیں اور $\angle PRQ$ بنتا ہے۔ اس طرح $\angle PRQ$، قطعہ PSQ کا زاویہ کہلاتا ہے۔ اب طرح سے ہم اور بھی سیکٹر میں زاویے بنا سکتے ہیں۔



نصف دائرہ کا زاویہ ایک قائمہ زاویہ ہے Angle in a Semi-Circle is a Right Angle



1- کوئی قطعہ خط AB لیکر اس کا وسطی نقطہ O لیا۔

2- $\overline{AB}$ پر $\overline{OA}$ رداس کا نصف دائرہ لگایا۔

3- نصف دائرہ پر کوئی نقطہ C لیا۔ C کو A اور R سے ملایا۔ پس $\angle ACB$ نصف دائرہ زاویہ ہے۔

4- پروٹریکٹر کے مرکز کو C پر رکھا اور $\overline{AC}$ پر اس کی لائن کو رکھا۔

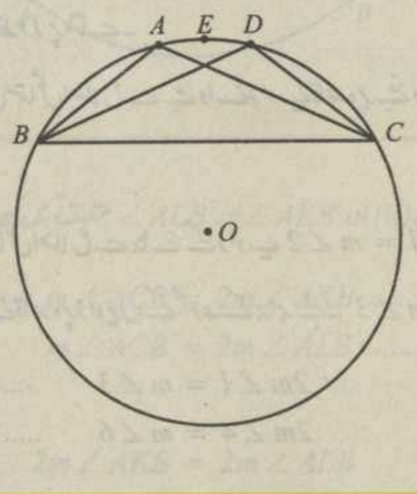
ہمیں پتا چلتا ہے $\angle ACB$ کی مقدار 90° ہے۔ یعنی زاویہ قائمہ

پس نصف دائرہ میں زاویہ کی مقدار 90° ہوتی ہے۔ یعنی نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ بنتا ہے۔ $m\angle ACB = 90^\circ$

ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں

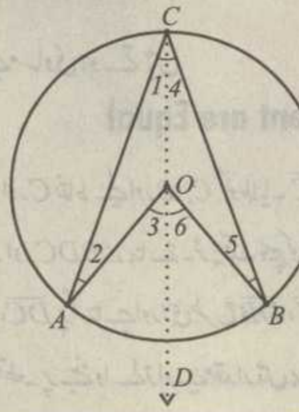
Angles in the Same Segment are Equal

'O' کو مرکز مان کر دائرہ لگایا۔ دائرہ پر B اور C نقاط لیے اور B, C کو ملایا۔ $\overline{BC}$ دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی ایک ہی دائرہ کے قطعہ میں زاویے $\angle BAC$ اور $\angle BDC$ بنائے۔ ٹریسنگ پیپر کو $\angle BAC$ پر رکھا اس کا نقش لیا۔ اس نقش کو $\angle BDC$ پر رکھا۔ A، D پر رکھا تو $\overline{AB}$، $\overline{DC}$ پر گرتا ہے اور اسی طرح $\overline{DB}$، $\overline{AC}$ پر گرتا ہے۔ لہٰذا $m\angle BAC = m\angle BDC$ جس سے پتا چلتا ہے۔ دائرہ کے ایک ہی قطعہ پر بننے والے زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔



مرکزی زاویہ Central Angle

قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔



شکل (i)

شکل (i) میں $\angle AOB$ قوس صغیرہ $\widehat{AB}$ کا مرکزی زاویہ ہے جبکہ $\angle ACB$ قوس کبیرہ $\widehat{ACB}$ کا محصور زاویہ ہے۔

C کو O سے ملا کر بڑھایا جو دائرہ کو نقطہ D پر ملتا ہے۔

قاعدہ $\overline{AC}$ پر مثلث $\angle ABC$ کی متماثل اضلاع سے بننے والے زاویے قاعدہ پر بننے والے زاویوں کا مجموعہ مخالف بیرونی زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

قاعدہ AC پر مثلث AOC کے متماثل اضلاع سے بنائے گئے زاویے $m\angle 1 = m\angle 2$

مثلث کا مخالف بیرونی زاویہ اس کے قاعدہ پر زاویوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔ $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3$

$$\therefore 2m\angle 1 = m\angle 3 \quad \text{..........}(i)$$

اسی طرح $2m\angle 4 = m\angle 6 \quad \text{..........}(ii)$

$\therefore$ (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$2m\angle 1 + 2m\angle 4 = m\angle 3 + m\angle 6$$

$$2(m\angle 1 + m\angle 4) = m\angle 3 + m\angle 6$$

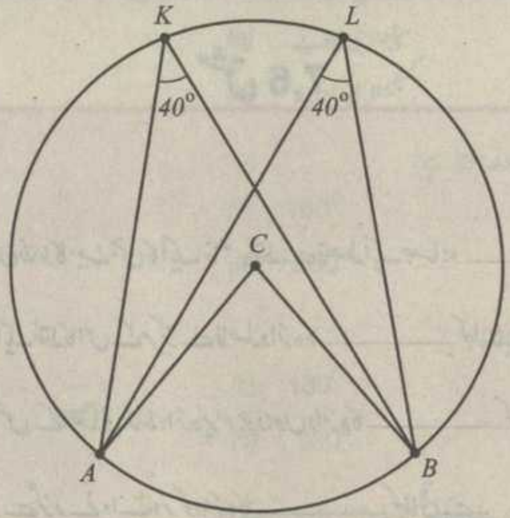
$$2m\angle ABC = m\angle AOB$$

یا $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

7.6.4 اطلاق Applications

ایک ہی قوس میں بننے والے تمام زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

$$m\angle K = m\angle L = 40^o$$



شکل (ii)

$\angle ACB$ مرکزی زاویہ ہے شکل (ii) اور $\angle AKB$ اور $\angle ALB$ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے ہیں۔

$$\therefore m\angle ACB = 2m\angle AKB \text{ ....}(i)$$

اور $m\angle ACB = 2m\angle ALB$ ....(ii)

$\therefore$ (i) اور (ii) کی رو سے

$$2m\angle AKB = 2m\angle ALB$$

$$m\angle AKB = m\angle ALB$$

پس ایک ہی قوس پر بننے والے زاویے برابر ہوتے ہیں۔

یاد رکھیے:

اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو چھوٹی قوسیں متماثل ہوں تب ان کی بڑی قوسوں سے بننے والے متناظرہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

مشق 7.6

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) ایک مستوی میں نقاط کا سیٹ جن کا ایک خاص نقطہ سے فاصلہ ایک جیسا ہو ________ کہلاتا ہے۔

(ii) دائرہ پر موجود ایک نقطہ کا اس کے مرکز سے فاصلہ دائرہ کا ________ کہلاتا ہے۔

(iii) ایک قطعہ خط جس کے اختتامی نقاط دائرہ پر موجود ہوں دائرہ کا ________ کہلاتا ہے۔

(iv) دائرہ کے مرکز سے گزرنے والے وتر کو دائرہ کا ________ کہلاتی ہے۔

(v) دائرہ کا نصف ________ کہلاتا ہے۔

(vi) نصف دائرہ سے بڑی قوس کو ________ کہتے ہیں۔

(vii) ایک دیے گئے مرکز اور ایک دیے گئے ________ سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنا سکتے ہیں۔

(viii) قوس اور دو رداسی قطعات سے گھرا ہوا علاقہ ________ کہلاتا ہے۔

(ix) ایک سیدھا خط جو دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرے ________ کہلاتا ہے۔

(x) نصف دائرہ میں زاویہ ________ ہوتا ہے۔

جائزہ مشق 7

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. ایسا زاویہ جس کی مقدار 180° سے زائد مگر 360° سے کم ہو کہلاتا ہے:

(a) عکس زاویہ (b) منفرجہ زاویہ
(c) زاویہ مستقیم (d) حادہ زاویہ

2. ایسے دو زاویے جن میں مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو کہلاتے ہیں:

(a) راسی زاویے (b) سپلیمنٹری زاویے
(c) متصلہ زاویے (d) کمپلیمنٹری زاویے

3. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ہوتا ہے:

(a) 90° (b) 180°
(c) 270° (d) 360°

4. زاویہ مستقیم کا درجہ ہوتا ہے:

(a) 90° (b) 180°
(c) 270° (d) 360°

5. اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ ہوتے ہیں

(a) مساوی (b) غیر مساوی
(c) متصلہ زاویے (d) متبادلہ زاویے

6. ایسی مثلث جس کا کوئی ضلع بھی برابر نہ ہو، کہلاتی ہے:

(a) متساوی الساقین مثلث (b) مساوی الاضلاع مثلث
(c) مختلف اضلاع مثلث (d) قائمۃ الزاویہ مثلث

7. ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں، کہلاتی ہے:

(a) حادۃ الزاویہ مثلث (b) قائمۃ الزاویہ مثلث
(c) زاویہ مستقیم (d) حادہ زاویہ

8. ایسی کثیر الاضلاع جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوں کہلاتی ہے:

(a) کثیر الاضلاع (b) متوازی الاضلاع
(c) مربع (d) مستطیل

9. نصف دائرہ سے بڑی قوس کہلاتی ہے:

(a) قوسِ صغیرہ (b) وتر

(c) قوسِ کبیرہ (d) قطر

10. مساوی رداس یا قطر والے دائرے کہلاتے ہیں:

(a) ہم مرکز دائرے (b) نصف دائرے

(c) متماثل دائرے (d) ہم دائرے نقاط

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. دو زاویے جن کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو __________ کہلاتے ہیں۔

2. اگر دو زاویوں کا مجموعہ، زاویہ مستقیم ہو تو زاویے کہلاتے ہیں __________

3. زاویہ جن کی مقدار 90° سے زائد اور 180° سے کم ہو، کہلاتا ہے __________

4. دو غیر متصلہ زاویے جن میں ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو __________ کہلاتے ہیں۔

5. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ __________ ہوتا ہے۔

6. دو لائنیں جو تیسری لائن کے متوازی ہوں تو وہ __________ متوازی ہوتی ہیں۔

7. دو ہندسی اشکال جو جسامت میں مساوی اور شکل میں یکساں ہوں __________ ہوتی ہیں۔

8. ایک مثلث جس کا کوئی ضلع بھی آپس میں برابر نہ ہو __________ ہوتی ہیں۔

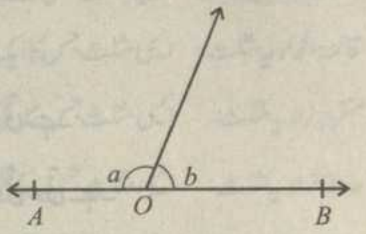
9. وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو __________ کہلاتا ہے۔

10. نصف دائرہ میں بننے والا زاویہ __________ ہوتا ہے۔

خط مستقیم پر متصلہ زاویے

دیا گیا ہے کہ $m\angle a + m\angle b = 180^o$

تو $\overline{AOB}$ ایک خط مستقیم ہے۔



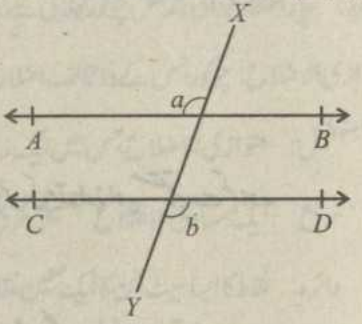
راسی زاویے

معلوم ہے کہ $m\angle a = m\angle b$ اور $m\angle c = m\angle d$ ہے

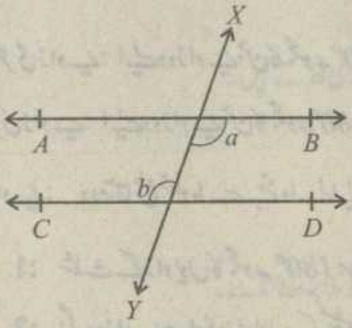
تو $\overline{AOB}$ اور $\overline{DOC}$ خطوط مستقیم ہیں۔

متوازی خطوط کے ساتھ بننے والے زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$

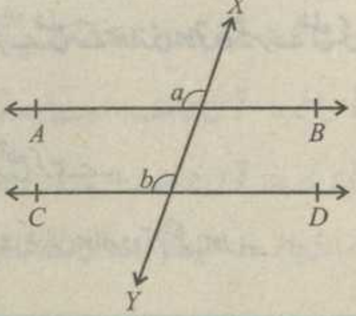


دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



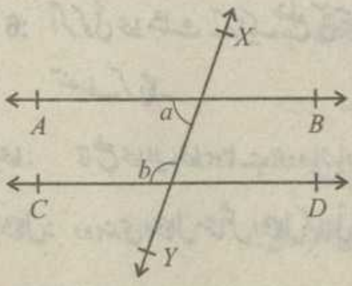
متبادلہ زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



اندرونی زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a + m\angle b = 180^o$



خلاصہ SUMMARY

زاویہ: زاویہ دو ایسی شعاعوں کا اتصال (یونین) ہوتا ہے جس کا نقطہ آغاز مشترک ہو۔

قائمہ زاویہ: قائمہ زاویہ ایسا زاویہ ہوتا ہے جس کی مقدار 90^o ہو۔

زاویہ مستقیم: زاویہ مستقیم کی مقدار 180^o ہوتی ہے۔

حادہ زاویہ: حادہ زاویہ کی مقدار 0^o سے بڑی اور 90^o سے چھوٹی ہوتی ہے۔

منفرجہ زاویہ: منفرجہ زاویہ کی مقدار 90^o سے بڑی اور 180^o سے چھوٹی ہوتی ہے۔

عکسی زاویہ: عکس زاویہ کی مقدار 180^o سے بڑی اور 360^o سے کم ہوتی ہے۔

مساوی زاویے: مساوی زاویوں کی مقداریں مساوی ہوتی ہیں۔

متصلہ زاویے: دو ایسے زاویے جن کا راست مشترک اور ایک بازو مشترک ہو، متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔

کمپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 90^o ہو۔

سپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180^o ہو۔

راسی زاویے: دو متقاطع خطوط سے بننے والے ایسے غیر متصلہ زاویے جن کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو۔

نتائج:

1: مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^o ہوتا ہے۔

2: اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔

3: اگر دو زاویے، دو مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔

4: دو خطوط تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

5: اگر تین متوازی خطوط کسی خط قاطع پر مساوی قطعات قطع کریں تو ہر خط قاطع پر مساوی قطعات کاٹتے ہیں۔

6: اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کریگا۔

قاطع خط: قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔

متماثل اشکال: دو ہندسی اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں اگر ان کی جسامت یکساں ہو اور وہ ہم شکل ہوں۔

کثیر الاضلاعی: مستوی پر ایک ایسی بند شکل جو تین یا زیادہ اضلاع پر مشتمل ہو۔

متساوی الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

مختلف اضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی نہ ہو۔

قائمۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

منفرجہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس میں ایک زاویہ منفرجہ (90^o سے بڑا) ہو۔

حادۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ (90^o سے کم) ہوں۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع لمبائی میں مساوی ہوں۔

دو مثلثان کے متماثل ہونے کی صورتیں

(i) ض ض ض ≅ ض ض ض (ii) ض زض ≅ ض زض (iii) زض ز ≅ زض ز (iv) آر ایچ ایس ≅ آر ایچ ایس

چوکور: چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔

متوازی الاضلاع: چوکور جس کے دو مخالف اضلاع کے جوڑے متوازی ہوتے ہیں۔

مستطیل: متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع: ایک مساوی الاضلاع مستطیل مربع کہلاتی ہے۔

دائرہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا ایک معین نقطہ سے فاصلہ برابر ہو، دائرہ بناتا ہے۔

رداس: اس قطعہ کی لمبائی جو دائرے کے مرکز کو اس کے کسی نقطہ سے ملائے۔

قطر: اس وتر کی لمبائی جو دائرے کے مرکز میں سے گزرے، قطر کہلاتی ہے۔

قوس: دائرے کا وہ حصہ جس کے سرے اور درمیانی نقاط دائرے پر واقع ہوں، دائرہ کی قوس کہلاتا ہے۔

نصف دائرہ: قوس جو دائرے کے نصف پر مشتمل ہو، نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

قوس صغیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے کم ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

مساوی دائرے: ایسے دائرے جن کے مساوی رداس ہوں یا مساوی قطر ہوں۔

قاطع خط: ایسا خط جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرے۔

مماس: ایسا خط، جو دائرے کے رداس کو اس کے بیرونی سرے پر عمود ہو۔

سیکٹر: دائرہ کا وہ علاقہ جو دائرہ کی قوس اور اس کے سروں کو ملانے والے رداسی قطعات کے اندر گھرا ہوا ہو۔

ہم مرکز دائرے: ایسے ہم مستوی دائرے جن کا مرکز مشترک نقطہ ہو لیکن ان کے رداس مختلف ہوں۔

مرکزی زاویہ: کسی قوس صغیرہ کا مرکز پر بننے والا زاویہ، مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط: دائرہ کے محیط پر واقع نقاط کو ہم دائرہ نقاط کہتے ہیں۔

نتائج: *(1)* نصف دائرہ کا محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(2) دائرے کے ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(3) ایک ہی قوس میں محصور زاویے مساوی ہوتے ہیں۔