باب 3

معاشیات میں ریاضی اور شماریات کے بنیادی آلات

Basic Tools of Mathematics and Statistics in Economics

اہم موضوعات

☆ بنیادی ریاضیاتی تصورات

(a) متغیرات

(b) مساواتیں اور گرافی تعبیر

(c) تفاعل

☆ شماریاتی تصورات

(a) شماریات کا مفہوم

(b) شماریاتی مواد اکھٹا کرنے کے طریقے

(c) جماعت بندی اور جدول بندی

www.downloadclassnotes.com

بنیادی ریاضیاتی تصورّات

(Basic Tools of Mathematics)

متغیرات: (Variables) ایسی مقداریں جو تبدیل ہوتی رہیں اور مختلف قیمتیں اپنا سکیں۔ متغیرات یا متغیر مقداریں کہلاتی ہیں۔ پروفیسر کوروز (Kooros) متغیر مقدار کی تعریف ان الفاظ میں بیان کرتے ہیں:

"It is a symbol which during the discussion may assume different values or a set of admissible values."

"یہ ایک ایسی رمزی علامت ہوتی ہے، جو کسی بحث کے دوران مختلف قیمتیں یا قابل قبول قیمتوں کا کوئی جٹ (سیٹ) اپنا سکے۔"

ای۔ٹی۔ڈولنگ (E.T.Dowling) لکھتے ہیں۔

"A variable ranges over a set of possible values within a given problem."

"ایسی مقدار جو کسی دیئے گئے مسئلہ سے متعلق تمام ممکنہ قیمتوں کے سیٹ پر محیط ہو۔ متغیر مقدار کہلاتی ہے۔"

ایک اور ماہر لکھتے ہیں۔

"A variable is a magnitude which is measurable and taken of different values."

"ایسی مقدار جو قابل پیائش ہو اور مختلف قیمتیں اختیار کر سکے متغیر مقدار کہلاتی ہے۔"

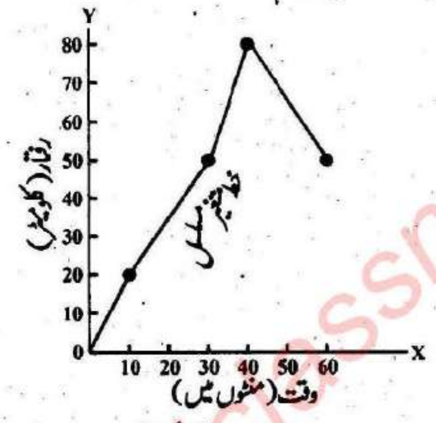
عام زندگی میں درجہ حرارت، وقت اور گاڑی کی رفتار وغیرہ متغیر مقداریں ہوتی ہیں۔ معاشیات میں بھی بہت سی ایسی مقداریں ہیں، جو تبدیل ہوتی رہتی ہیں اور ہمیشہ ایک جیسی نہیں رہتیں۔ مثلاً آمدنی، صرف، بچت، سرمایہ کاری، قیمت، طلب، رسد، افادہ وغیرہ۔

ریاضی دان کسی متغیر مقدار کو رمزی علامت کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے انگریزی کے حروف مثلاً X,Y,Z وغیرہ استعمال کرتے ہیں، جبکہ معیشت دان کسی مقدار کے انگریزی کے پہلے حرف کو بطور رمزی علامت لکھتے ہیں۔ مثال کے طور پر قیمت یعنی Price کے لئے "P" افادہ (Utility) کے لئے "U" صرف (Consumption) کے لئے "C" بچت (Saving) کے لئے "S" اور سرمایہ کاری (Investment) کے لئے "I" وغیرہ، لیکن بعض اوقات اس اصول سے ہٹ کر کئی متغیرات کو مخصوص رمزی علامتوں سے بھی پکارا جاتا ہے۔ جیسے آمدنی (Income) کو "Y" درآمدات (Imports) کو "M" برآمدات (Exports) کو "X" اور منافع (Profit) کو π سے۔ کسی مخصوص عرصہ وقت میں کسی متغیر مقدار کی بڑی سے بڑی قیمت کو "حد بالا" (Upper Limit) اور کم سے کم قیمت کو "حد زیریں" (Lower Limit) کہا جاتا ہے اور ان دو حدود کے درمیانی فاصلہ کو سلسلۂ حدود (Range) کا نام دیا جاتا ہے، مثلاً اگر 2005ء کے سال میں چینی کی زیادہ سے زیادہ قیمت 28 روپے فی کلوگرام اور کم سے کم 25 روپے فی کلوگرام رہی ہو تو 28 حد بالا اور 25 حد زیریں ہوگی۔

متغیرات کی اقسام

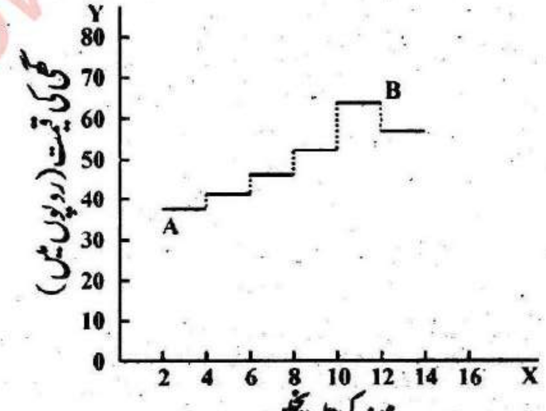
1- متغیر مسلسل (Continuous Variable)
2- متغیر غیر مسلسل (Discontinuous Variable)
3- آزاد متغیر (Independent Variable)
4- تابع متغیر (Dependent Variable)

1- متغیر مسلسل: (Continuous Variable) ایسی متغیر مقدار جو تبدیل ہوتے وقت ہر نقطہ کو چھو کر گزرے سلسلہ حدود کی ہر قیمت کو اپنائے اور درمیان میں کوئی وقفہ (Gap) نہ چھوڑے یا کوئی (Jump) جست نہ لگائے، متغیر مسلسل کہلاتی ہے۔ مثلاً گھڑی کی سوئیاں ہر نقطہ کو چھو کر گزرتی ہیں اور وقت میں تبدیلی ہر سیکنڈ کو اپنا کر ہوتی ہے۔ اسی طرح گاڑی کی رفتار میں تبدیلی بھی بغیر کسی جست کے ہوتی ہے۔ متغیر مسلسل کا خط بغیر ہاتھ اٹھائے مکمل ہو جاتا ہے، کیونکہ یہ لگا تار ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ گاڑی جب چلتی ہے تو پہلے منٹ میں اس کی رفتار 5 کلومیٹر دسویں منٹ میں 20 کلومیٹر تیسویں منٹ میں 50 کلومیٹر، چالیسواں منٹ میں 80 کلومیٹر اور ساٹھویں منٹ میں 50 کلومیٹر فی گھنٹہ ہوتی ہے۔ اس طرح متغیر مسلسل کا خط مندرجہ ذیل صورت میں بنتا ہے۔



2- متغیر غیر مسلسل: (Discontinous Variable) جب کوئی متغیر مقدار تبدیل ہوتے وقت اپنے سلسلہ حدود کی ہر قیمت کو نہ اپنائے۔ ہر نقطے کو چھو کر نہ گزرے بلکہ درمیان میں وقفہ (Gap) چھوڑے تو اسے متغیر غیر مسلسل کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر گھی کی قیمت 50 روپے فی کلوگرام سے 60 روپے فی کلوگرام ہوتے وقت ایک ایک پیسہ کر کے نہیں بدلتی بلکہ 50 روپے سے 52 روپے پھر 55 روپے پھر 58 روپے اور پھر 60 روپے ہوتی ہے۔ وضاحت کے لئے درج ذیل ڈائیگرام بنائی جاتی ہے۔



OX خط کے ساتھ مہینے کی مختلف تاریخیں اور OY کے ساتھ گھی کی قیمت فی کلوگرام رکھی گئی ہے۔ AB متغیر غیر مسلسل کا خط ہے جو کہ لگا تار نہیں بلکہ مختلف ٹکڑوں پر مشتمل ہے اور درمیان میں وقفوں (Jumps) کا اظہار کرتا ہے۔

3-4- آزاد و تابع متغیر (Independent and Dependent Variable): بعض متغیر مقداروں کا ایک دوسری پر انحصار ہوتا ہے اور تفاعلی رشتوں میں منسلک ہوتی ہیں۔ لہٰذا ان میں سے جب ایک مقدار تبدیل ہوتی ہے تو دوسری بھی تبدیل ہو جاتی ہے۔ جو مقدار پہلے از خود تبدیل ہوتی ہے اسے آزاد متغیر اور جو دوسری مقدار کی وجہ سے تبدیل ہوا سے تابع متغیر کہتے ہیں۔

مثلاً قانون طلب کی رو سے جب کسی شے کی قیمت تبدیل ہوتی ہے تو طلب میں بھی تبدیلی واقع ہو جاتی ہے۔ یعنی $qd = f(p)$

یہاں قیمت p آزاد متغیر ہے اور طلب qd تابع متغیر ہے۔

اسی طرح جب آمدنی (Y) تبدیل ہوتی ہے تو صرف (C) میں بھی تبدیلی آجاتی ہے۔

یعنی: $C = f(Y)$

یہاں (Y) آمدنی آزاد متغیر ہے اور (C) صرف تابع متغیر۔

آمدنی اور بچت کے تفاعلی رشتے کو پیش نظر رکھتے ہوئے یہ کہہ سکتے ہیں کہ $S = f(Y)$ یعنی آمدنی تبدیل ہونے سے بچت میں تبدیلی آجاتی ہے۔ اس لئے y آمدنی آزاد متغیر ہے اور بچت S تابع متغیر۔

ساکنات یا مستقلات (Constants): یہ ایسی مقداریں ہوتی ہیں، جن کی قدر پہلے سے معلوم ہوتی ہے اور یہ مستقل ہوتی ہیں، کیونکہ ان میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔ مثلاً کار کا حجم اور جسامت ایک ساکن مقدار ہے، کیونکہ رفتار کے کم و بیش ہونے کے باوجود اس کے وزن یا سائز میں کوئی تبدیلی نہیں آتی۔

E. T. Dowling لکھتے ہیں۔

"A Constant is a quantity that does not change in a given problem."

"ایک عددی مستقل مقدار تمام حالات میں ایک ہی قیمت رکھتی ہے۔ مثلاً 50,10,5 وغیرہ۔

اسی طرح کسی مساوات میں اعداد کی صورت میں کچھ معلوم مقداریں ہوتی ہیں۔

مثلاً $2x - 18 = 4$

اس میں 2، 18 اور 4 معلوم مقداریں ہیں۔ اسی طرح $4x + 2 = 0$ مساوات میں 4، 2 مستقل مقداریں ہیں۔

پیرامیٹرز یا متبدل مستقلات (Parameters): یہ ایسی مقداریں ہوتی ہیں، جو عملی زندگی میں تو تبدیل ہوتی ہیں، لیکن مخصوص حالات میں انہیں بدستور فرض کر لیا جاتا ہے۔ یعنی یہ فرض کیا جاتا ہے کہ ان میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی۔ مثلاً قانون رسد میں یہ فرض کیا گیا ہے کہ اگر:

1- شے کی لاگت پیدائش 2- طریقہ پیدائش

3- خام مال و مشینری وغیرہ کی قیمتیں نہ بدلیں تو کسی شے کی قیمت میں اضافے سے اس کی رسد پھیل جاتی ہے اور قیمت کم ہونے پر رسد سکڑ جاتی ہے۔ پس یہاں لاگت پیدائش طریقہ پیدائش اور خام مال و مشینری کی قیمت وہ پیرامیٹرز ہیں۔ جو عام زندگی میں تو بدلتے رہتے ہیں، لیکن قانون رسد کو درست ثابت کرنے کے لئے انہیں "بدستور" فرض کر لیا جاتا ہے۔

اسی طرح قانون طلب میں صارف کی پسند، عادات اور فیشن (T)، صارفین کی تعداد (N) صارف کی آمدنی (y) اور متبادل اشیاء کی قیمت (P_i) پیرامیٹرز کہلاتی ہیں۔ غرضیکہ معاشیات میں کسی قانون کے جو بھی مفروضات ہوتے ہیں۔ انہیں ہم ریاضی کی اصلاح میں پیرامیٹرز کہتے ہیں۔

معاشیات کے اہم متغیرات

کلی اور جزوی معاشیات کے اہم متغیرات آمدنی (y)، صرف (c)، بچت (s)، سرمایہ کاری (I)، شرح سود (i)، طلب (qd)، رسد (qs)، قیمت (p)، افادہ (u) وغیرہ ہیں۔ جن کے باہمی تعلق کا جائزہ درج ذیل سطور میں لیا جاتا ہے۔

www.downloadclassnotes.com

کلی معاشیات کے متغیرات اوران کے تفاعلی رشتے

آمدنی اور صرف کا تعلق: صرف سے مراد ضروریات زندگی پر ہونے والے اخراجات لئے جاتے ہیں۔ آمدنی اور صرف میں گہرا رشتہ پایا جاتا ہے' کیونکہ آمدنی میں اضافے سے صرفی خرچ بڑھ جاتا ہے اور آمدنی کم ہو جانے پر صرفی خرچ بھی کم ہو جاتا ہے۔ صرف اور آمدنی کے اس باہمی تعلق کو ریاضی کی اصطلاح میں ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔ $c = f(y)$ یعنی صرف آمدنی کا تفاعل ہے۔

صرف کے دو اہم تصورّات درج ذیل ہیں۔

i- اوسط میلان صرف (Average Propensity to Consume)

ii- مختتم میلان صرف (Marginal Propensity to Consume)

اوسط میلان صرف:(APC) میلان صرف سے مراد آمدنی اور صرف کی باہمی نسبت لی جاتی ہے۔ یعنی لوگ اپنی آمدنیوں میں سے کس نسبت سے ضروریات زندگی پر خرچ کرتے ہیں۔ اس تعلق کو ہم اس طرح سے بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{اوسط میلان صرف} = \frac{\text{صرف}}{\text{آمدنی}} \quad \text{یا} \quad APC = \frac{c}{y}$$

مثال کے طور پر اگر کسی شخص کی آمدنی ایک ہزار روپے ماہانہ ہو اور اس میں سے وہ 700 روپے ضروریات زندگی پر خرچ کر دے تو اس کا میلان صرف $700/1000 = .7$ ہوگا۔ میلان صرف اگر اکائی (1) سے کم ہو تو اس کا مطلب یہ ہے کہ لوگ آمدنی کے مقابلے میں خرچ کم کر رہے ہیں اور کچھ رقوم بچا رہے ہیں اور اگر یہ اکائی (1) کے برابر ہو تو اس کا مطلب یہ ہے کہ لوگوں کی آمدنی اور اخراجات برابر ہیں اور اگر اکائی (1) سے زائد ہو تو اس کا مطلب ہے کہ لوگ آمدنی کے مقابلہ میں خرچ زیادہ کر رہے ہیں۔ یعنی ادھار یا قرض لے رہے ہیں۔

مختتم میلان صرف:(MPC) اگر صارف کی آمدنی میں اضافہ ہو جائے تو اس کا خرچ بھی بڑھ جاتا ہے۔ اس زائد آمدنی اور زائد خرچ کی باہمی نسبت کو مختتم میلان صرف کا نام دیا جاتا ہے' جسے ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مختتم میلان صرف} = \frac{\text{صرف میں اضافہ یا کمی}}{\text{آمدنی میں اضافہ یا کمی}} \quad \text{یا} \quad MPC = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

مثلاً اگر صارف کی آمدنی 1000 روپے سے تبدیل ہو کر 1500 روپے ہو جائے اور صرف 700 روپے سے تبدیل ہو کر 1000 ہو جائے تو اس طرح آمدنی میں تبدیلی 500 روپے ہوگی اور صرف میں تبدیلی 300 روپے ہوگی لہٰذا:

$$\text{مختتم میلان صرف} = \frac{300}{500} = .6 \text{ ہوگا}$$

(مختتم میلان صرف صفر سے زیادہ اور اکائی سے کم ہوتا ہے) $0 < MPC < 1$

آمدنی اور بچت کا تعلق: بچت سے مراد آمدنی کا وہ حصہ ہوتا ہے' جو لوگ اپنی ضروریات زندگی پر خرچ کرنے کے بعد بچا لیتے ہیں۔ بچت بھی آمدنی کا تفاعل ہے۔ یعنی اس کا انحصار آمدنی پر ہوتا ہے۔ اگر آمدنی

بڑھ جائے تو بچت بڑھ جاتی ہے اور آمدنی کم ہونے پر بچت کم ہو جاتی ہے۔ آمدنی اور بچت کے اس تعلق کو ہم اس طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$S = S(y) \text{ یا } S = f(y)$$

یعنی بچت تفاعل ہے' آمدنی کا۔

صرف کی طرح بچت اور آمدنی کے تعلق کو بھی دو صورتوں میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

i- اوسط میلان بچت (Average Propensity to Save)

ii- مختتم میلان بچت (Marginal Propensity to Save)

اوسط میلان بچت:(APS) اوسط میلان بچت سے مراد آمدنی اور بچت کی باہمی نسبت لی جاتی ہے۔

$$\text{اوسط میلان صرف} = \frac{\text{بچت}}{\text{آمدنی}} \text{ یا } APS = \frac{S}{Y}$$

سابقہ مثال کے مطابق اگر صارف کی آمدنی 1000 روپے ہو اور اس کا صرف 700 روپے ہو تو اس کی بچت 300 روپے ہوگی۔ اس طرح میلان بچت $\frac{300}{1000} = .3$ ہوگا' چونکہ بچت آمدنی کا وہ حصہ ہے' جو ضروریات زندگی پر خرچ نہیں کیا جاتا بلکہ پس انداز کر لیا جاتا ہے۔ اس لئے

اوسط میلان بچت = 1 – اوسط میلان صرف $APS = 1 - APC$

مختتم میلان بچت:(MPS) مختتم میلان بچت سے مراد آمدنی میں اضافہ یا کمی سے بچت میں جو اضافہ یا کمی ہوتی ہے' ان دونوں کی باہمی نسبت ہے۔ اس تعلق کو ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{مختتم میلان بچت} = \frac{\text{بچت میں اضافہ یا کمی}}{\text{آمدنی میں اضافہ یا کمی}} \text{ یا } MPS = \frac{\Delta S}{\Delta Y}$$

اوپر کی مثال کے مطابق اگر آمدنی میں اضافہ 500 روپے کا ہو تو خرچ میں اضافہ 300 روپے کا ہوگا اور 200 روپے کی بچت ہوگی۔ لہٰذا آمدنی میں تبدیلی اور بچت میں تبدیلی کی اس باہمی نسبت کو ہم اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$MPS = \frac{\Delta S}{\Delta Y} = \frac{200}{500} = 0.4$$

مختتم میلان بچت = 1 – مختتم میلان صرف یا $MPS = 1 - MPC$

آمدنی اور سرمایہ کاری کا تعلق: سرمایہ کاری سے مراد ہے' سرمائے کے حقیقی اثاثوں میں اضافہ کرنا یعنی کوئی نیا کارخانہ قائم کرنا' نئی عمارات تعمیر کرنا' یا نئی زمین زیر کاشت لانا وغیرہ۔ سرمایہ کاری اور آمدنی میں بھی تفاعلی رشتہ پایا جاتا ہے۔ آمدنی اور سرمایہ کاری کے باہمی رشتوں کی وضاحت دو صورتوں میں کی جاسکتی ہے۔

(i) ضارب کے پیش نظر: ضارب کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ جب سرمایہ کاری میں اضافہ ہوتا ہے' تو آمدنی میں کئی گنا اضافہ ہو جاتا ہے اور سرمایہ کاری کا حجم سکڑنے پر آمدنی میں کئی گنا کمی آجاتی ہے۔

پس آمدنی سرمایہ کاری کا تفاعل بنتی ہے اور ریاضی کی اصطلاح میں اسے اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$y = f(I)$ یعنی آمدنی تفاعل ہے سرمایہ کاری کا۔

$\Delta y = K.\Delta I$ یعنی آمدنی میں تبدیلی = سرمایہ کاری میں تبدیلی × ضارب۔

یہاں پر K ضارب کی رمزی علامت کے طور پر لکھا گیا ہے۔

ضارب کی قدر جتنی زیادہ ہو گی سرمایہ کاری میں تبدیلی سے آمدنی میں اسی قدر اضافہ ہوگا۔ مثلاً اگر سرمایہ کاری میں 20 کروڑ روپے کا اضافہ کیا جائے اور ضارب کی قوت 5 ہو تو قومی آمدنی میں 5×20=100 کروڑ کا اضافہ ہوگا۔ اسی طرح سے اگر سرمایہ کاری میں کمی کر دی جائے تو ضارب کی بدولت قومی آمدنی میں کمی سرمایہ کاری میں کمی کے مقابلے میں کئی گنا ہوگی۔

(ii) اصول اسراع کے پیش نظر: آمدنی اور سرمایہ کاری کے دوسرے تعلق کو ہم اصول اسراع Acceleration Principle کے پیش نظر بیان کرتے ہیں۔ جب لوگوں کی آمدنیوں میں اضافہ ہوتا ہے تو اس سے صرف دولت کا معیار بلند ہو جاتا ہے اور وہ ضروریات زندگی پر اپنا خرچ بڑھا دیتے ہیں جس کی وجہ سے اشیاء کی طلب میں اضافہ ہوتا ہے۔ جس کو پورا کرنے کے لئے رسد میں اضافہ کرنا پڑتا ہے۔ جس کے لئے سرمایہ کاری میں اضافہ ضروری ہوتا ہے۔ سرمایہ کاری میں یہ اضافہ جو لوگوں کی آمدنیوں میں اضافہ کی وجہ سے ہوتا ہے کئی گنا زیادہ ہوتا ہے۔ اسے اصول اسراع کا نام دیا گیا ہے۔ اسے ہم اس طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$I = f(y)$ یعنی سرمایہ کاری تفاعل ہے آمدنی کا۔ $= f\frac{dy}{dt}$ ΔI یعنی سرمایہ کاری میں تبدیلی کا انحصار قومی آمدنی میں مختلف اوقات میں تبدیلی پر ہوتا ہے۔

نوٹ: ڈیلٹا (Δ) تبدیلی کی نشانی ہے۔

بچت اور سرمایہ کاری کا تعلق: کینز کے مطابق کسی ملک میں بچتیں ہمیشہ سرمایہ کاری کے برابر ہوتی ہیں کیونکہ جس قدر رقومات بچائی جاتی ہیں۔ اسی قدر سرمایہ کاری میں لگائی جاتی ہیں۔ کینز کا کہنا ہے کہ بچتیں محض سرمایہ کاری کے برابر نہیں ہوتیں بلکہ یہ سرمایہ کاری کا متماثل (Identical) ہوتی ہیں۔ یعنی ہر صورت میں بچتیں سرمایہ کاری کے برابر ہوتی ہیں۔ بچتوں اور سرمایہ کاری کے اس تعلق کو اس طرح سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔

(i) آمدنی = صرف + بچت $y = C+S$

(ii) آمدنی = صرف + سرمایہ کاری $y = C+I$

چونکہ آمدنی مشترک ہے اس لئے۔

(iii) صرف + سرمایہ کاری = صرف + بچت

چونکہ صرف دونوں صورتوں میں برابر ہوتا ہے۔

اسی لئے بچت = سرمایہ کاری

یعنی $S = I$

اس ضمن میں یہ بات یاد رکھنی چاہیئے کہ حقیقی بچتیں اور حقیقی سرمایہ کاری تو باہم برابر ہوتی ہیں لیکن مجوزہ بچتوں کا مجوزہ سرمایہ کاری کے برابر ہونا ضروری نہیں۔ یہ صرف نقطہ توازن پر ہی ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں۔

سرمایہ کاری اور شرح سود کا تعلق: سرمایہ کاری کو متعین کرنے والے دو عوامل ہیں۔

i- سرمائے کی استعداد مختتم (Marginal Efficiency of Capital)

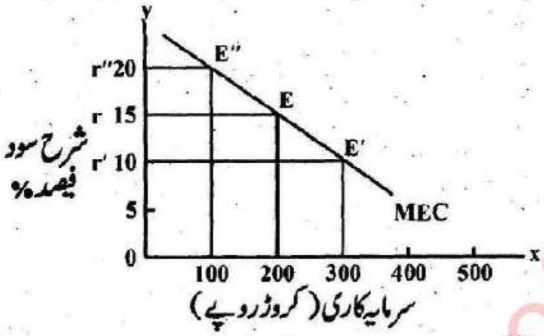
ii- شرح سود (Rate of Interest)

سرمائے کی استعداد مختتم میں اگر کوئی تبدیلی نہ آئے تو شرح سود کے بلند ہونے سے سرمایہ کاری کا حجم سکڑ جاتا ہے اور شرح

سود گرنے پر سرمایہ کاری میں اضافہ ہوجاتا ہے۔ سرمایہ کاری کا انحصار شرح سود پر ہوتا ہے۔ اسے ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$I = f(i)$$

یعنی سرمایہ کاری شرح سود کا تفاعل ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ شرح سود تبدیل ہونے پر سرمایہ کاری میں بھی تبدیلی آجاتی ہے۔ شرح سود اور سرمایہ کاری کے تفاعلی رشتے کی وضاحت اس ڈائیگرام کے ذریعے کی جاتی ہے۔



MEC سرمائے کی استعداد مختتم کا خط ہے۔ جب شرح سود or کے برابر ہے، تو سرمایہ کاری 200 کروڑ روپے ہے۔ شرح سود جب گر کر or' ہوگئی ہے، تو سرمایہ کاری 300 کروڑ روپے ہوگئی ہے۔ اسی طرح جب شرح سود بڑھ کر or'' ہو جاتی ہے۔ تو سرمایہ کاری کا حجم سکڑ کر 100 کروڑ روپے رہ جاتا ہے۔ پس سرمایہ کاری شرح سود کا تقلیلی تفاعل بنتی ہے۔

جزوی معاشیات کے متغیرات اور تفاعلی رشتے

طلب اور قیمت کا تعلق: کسی شے کی طلب کا انحصار اس کی قیمت پر ہوتا ہے۔ یعنی جب قیمت کم ہوتی ہے، تو طلب پھیل جاتی ہے اور قیمت بڑھنے پر طلب سکڑ جاتی ہے۔ یعنی ''طلب تفاعل ہے، قیمت کا۔'' اسے ہم اس طرح سے لکھ سکتے ہیں۔

$$qd = f(p)$$

طلب قیمت کا تقلیلی تفاعل بنتی ہے۔ یعنی اس کا قیمت کے ساتھ معکوس تناسب ہے، کیونکہ قیمت کے بڑھنے سے یہ کم ہوتی ہے اور قیمت کم ہونے پر اس میں اضافہ ہوجاتا ہے۔

رسد اور قیمت کا تعلق: رسد کا انحصار بھی قیمت پر ہوتا ہے، لیکن یہ تبدیلی ایک ہی سمت میں ہوتی ہے اور اس طرح یہ قیمت کا تکثیری تفاعل بنتی ہے۔ یعنی قیمت بڑھنے سے رسد میں اضافہ ہوجاتا ہے اور قیمت کم ہونے پر رسد میں کمی آجاتی ہے۔ اس تعلق کو ہم اس طرح بھی ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$qs = f(p)$$

افادہ اور مقدار کا تعلق: کسی شے کے افادہ اور مقدار میں بھی تفاعلی رشتہ پایا جاتا ہے۔ جتنی کسی شے کی زیادہ مقدار کسی شخص کے پاس آتی چلی جائے گی، اس کا مختتم افادہ اسی قدر کم ہوتا جائے گا۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ افادہ مقدار کا تقلیلی تفاعل ہے۔ اس کو ریاضی کی اصطلاح میں اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

$$u = f(q)$$

''افادہ تفاعل ہے، مقدار کا۔''

عاملین پیدائش اور پیداوار کا تعلق: عاملین پیدائش (محنت، سرمایہ وغیرہ) کی زیادہ اکائیاں کاروبار میں لگانے سے پیداوار کی مقدار میں اضافہ ہوتا چلا جاتا ہے۔ ایسے تفاعلی رشتے کو تفاعل پیدائش (Production Function) کا نام دیا جاتا ہے۔ جسے اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔ $Q = f(N, K)$

یعنی شے کی پیداوار محنت اور سرمائے کا تفاعل بنتی ہے، جبکہ زمین (L) اور تنظیم (O) کو معین عاملین قرار دیا جائے۔

مقدار اور مصارف پیدائش کا تعلق: کسی شے کی زیادہ مقدار پیدا کی جائے تو مصارف پیدائش بڑھ جاتے ہیں، جبکہ شے کو کم مقدار میں پیدا کرنے پر مصارف پیدائش بھی کم رہتے ہیں۔

اس طرح لاگت پیدائش شے کی پیدا کردہ مقدار کا تکثیری تفاعل بنتی ہے۔ جسے اس طرح سے لکھا جاتا ہے۔ $C = f(q)$

"مصارف پیدائش مقدار کا تفاعل ہے۔"

مقدارِ فروخت اور کل حاصل کا تعلق: کسی شے کی مقدار فروخت بڑھنے پر کل وصولی میں اضافہ ہوتا چلا جاتا ہے، جبکہ شے کی کم مقدار فروخت ہو رہی ہو تو کل وصولی بھی کم ہو جاتی ہے۔

یعنی کل وصولی شے کی مقدار فروخت کا تکثیری تفاعل بنتی ہے۔ جسے اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$R = f(q)$$

"کل حاصل مقدار فروخت کا تفاعل ہے۔"

مساواتیں (Equations)

مساوات سے مراد دو جبری جملوں کا باہم برابر ہونا ہے۔ جب دو جبری جملے ایک دوسرے کے برابر ہوں اور مساوی کی علامت (=) سے منسلک ہوں یا ایک جملہ صفر کے برابر ہو تو اسے مساوات کہتے ہیں۔ مثلاً

(i) $2x + 4 = 4x - 6$ (ii) $4x - 2 = 0$

جبری جملہ سے مراد حروف یا اعداد کا ایسا مجموعہ ہوتا ہے۔ جو منفی (-) اور مثبت (+) علامتوں سے منسلک ہو۔ اس جملے کا ہر حصہ جو جمع یا منفی کی علامتوں کی وجہ سے ایک دوسرے سے الگ ہو اس جملہ کا رکن (Term) کہلاتا ہے۔ مثلاً $4x-2$ ایک جملہ ہے، جس کے دو ارکان ہیں۔ ارکان کے لحاظ سے جملوں کی مندرجہ ذیل قسمیں ہیں۔

(i) ثنائی جملہ (Binomial): اس سے مراد ایسا جملہ ہے، جس کے صرف دو ارکان ہوں۔ مثلاً $3x - 5$

(ii) ثلاثی جملہ (Trinomial): ایسا جملہ جو تین ارکان پر مشتمل ہو۔ مثلاً

$$x^2 + 4x + 1$$

(iii) کثیر الارکان جملہ (Polynomial): ایسا جملہ جو چار یا اس سے زائد ارکان پر مشتمل ہو۔ مثلاً

$$x3 + 4x2 - 2x + 8$$

جیسا کہ پہلے بیان کیا جا چکا ہے، ایک مساوات کے دو جبری جملے مساوی کی علامت سے منسلک ہوتے ہیں۔ انہیں مساوات کی طرفین یا جانبین کہا جاتا ہے۔ مساوی کی علامت کے دائیں طرف کے جملے کو دائیں جانب (R.H.S.) اور مساوی کی علامت کے بائیں جانب کے جملے کو بائیں جانب (L.H.S.) کہا جاتا ہے۔

مساوات کی رمزی علامات (Symbols of Equations)

مساوات کی درج ذیل رمزی علامتیں ہوتی ہیں۔

(1) نامعلوم یا مجہول مقدار (Unknowns): ان سے مراد ایسی مقداریں ہوتی ہیں، جو کسی جملے میں انگریزی کے حروف تہجی مثلاً x, y, z پر مشتمل ہوتی ہیں۔ ان کی قدر پہلے سے معلوم نہیں ہوتی، بلکہ ان کی قدر کو معلوم کرنے کے لئے مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔ مثلاً $4x+2y=16$

اس مساوات میں y اور x دو نامعلوم مقداریں ہیں۔ اس میں x اور y کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہمیں مساوات کو حل کرنا پڑتا ہے۔ نامعلوم مقدار کی ایسی قدر معلوم کرنا جس کو مساوات میں رکھنے سے مساوات کی دونوں اطراف باہم برابر ہو جائیں۔ مساوات کا حل کہلاتا ہے اور x کی وہ قدر مساوات کا حل (Solution) یا اصل (Root) کہلاتی ہے۔

(2) معلوم مقداریں، مستقل مقداریں یا ساکنات (Constants): ان سے مراد ایسی مقداریں ہیں، جو اعداد پر مشتمل ہوتی ہیں اور ان کی قدر ہمیں پہلے سے معلوم ہوتی ہے، چونکہ ان کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی اس لئے انہیں مستقل مقداریں یا ساکنات بھی کہتے ہیں۔ کسی نامعلوم مقدار سے پہلے عددی سر کی شکل میں یا اس سے علیحدہ جو اعداد ہوتے ہیں، وہ معلوم مقدار کہلاتے ہیں۔ مثلاً $3x^2 + 4x - 5 = 0$ میں 3, 4, 5 مستقل مقداریں ہیں۔

(3) عددی سر (Co-efficient): عددی سر سے مراد وہ عدد ہے، جو کسی نامعلوم مقدار کے بائیں جانب ہوتا ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ اس عدد کو اتنی بار جمع کیا گیا ہے۔ مثلاً: $4x^2 + 3x + 10 = 0$ میں 4 اور 3 عددی سر ہیں۔ $4x^2$ سے مراد ہے کہ x^2 کو چار بار جمع کیا گیا ہے، یعنی $4x^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2$ اور 3x کا مطلب ہے کہ x کو تین بار جمع کیا گیا ہے۔ یعنی $3x = x + x + x$

(4) قوت یا قوت نما (Index or Power): اس سے مراد وہ عدد ہے، جو کسی نامعلوم مقدار کے اوپر دائیں جانب لکھا جاتا ہے۔ اس سے مراد یہ ہے کہ اس نامعلوم مقدار کو آپس میں اتنی بار ضرب دی گئی ہے۔ مثلاً x^5 کا مطلب یہ ہے کہ x کی قوت پانچ ہے۔ یعنی x کو آپس میں پانچ بار ضرب دی گئی ہے، یعنی $x^5 = x . x . x . x . x$

اگر کسی مساوات میں متغیر مقدار کا قوت نما منفی نہ ہو اور نہ ہی کسی کسر پر مشتمل ہو، بلکہ صحیح مثبت اعداد کی صورت میں ہو تو اسے صحیح یا ناطق (Rational) مساوات کہتے ہیں۔ مثلاً $2x^3 + 3x^2 - x = 16$

اس میں x کی قوت 3 اور x کی قوت 2 ہے، جو صحیح مثبت اعداد پر مشتمل ہے۔ اس لئے یہ ایک صحیح مساوات ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی متغیر مقدار کی قوت منفی یا کسر کی صورت میں ہو تو اسے غیر ناطق (Irrational) مساوات کہا جاتا ہے۔ مثلاً $x^{-3} + 4x^{½} + 3 = 8$

یہ ایک غیر ناطق مساوات ہے، کیونکہ اس میں x کی قوت 3- اور 1/2 ہیں جو کہ صحیح اعداد نہیں ہیں۔
اگر کسی مقدار مثلاً x کی قوت صفر ہو تو اس کی قدر ہمیشہ ایک کے برابر ہوتی ہے۔
مثلاً $x^0 = 1$ اور $10^0 = 1$ وغیرہ

مساوات کی اقسام (Forms of Equations)

مساوات کی اقسام کا جائزہ درج ذیل صورت میں لیا جاتا ہے۔

1- نامعلوم مقداروں کی تعداد کے مطابق
2- نامعلوم مقداروں کی قوتوں کے مطابق
3- ہمزاد مساواتیں
4- متماثلہ یا منطبق مساواتیں

(1) نامعلوم مقداروں کی تعداد کے مطابق: نامعلوم مقداروں کی تعداد کے مطابق مساوات کی مندرجہ ذیل قسمیں ہوتی ہیں۔

(i) ایک نامعلوم مقدار والی مساوات: اگر کسی مساوات میں نامعلوم مقدار کی تعداد صرف ایک ہو تو اسے ایک نامعلوم مقدار والی مساوات کہتے ہیں۔ مثلاً

(i) $4x + 2 = 8$ (ii) $3x - 1 = 10$

ان مساواتوں میں صرف x ایک نامعلوم مقدار ہے۔

(ii) دو نامعلوم مقداروں والی مساوات: اگر کسی نامعلوم مقدار کی تعداد دو ہو تو اسے دو نامعلوم مقداروں والی مساوات کہتے ہیں۔ مثلاً

$$3x + 4y + 8 = 16$$

اس میں x اور y دو نامعلوم مقداریں ہیں۔

(iii) تین نامعلوم مقداروں والی مساوات: اگر کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ہو تو وہ تین نامعلوم مقداروں والی مساوات کہلاتی ہے۔ مثلاً

(i) $x + y + z = 20$ (ii) $3x^2 + 2y - 4z = 18$

ان مساواتوں میں x, y, z تین نامعلوم مقداریں ہیں۔ اسی طرح کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی تعداد جس قدر ہوگی وہ اتنی ہی نامعلوم مقداروں والی مساوات کہلائے گی۔

(2) نامعلوم مقداروں کی قوتوں کے مطابق: کسی مساوات کی اس کی قوتوں کے اعتبار سے بھی مختلف قسمیں ہو سکتی ہیں۔ مثلاً:

(i) سادہ مساوات یا یک درجی مساوات (Linear Equation): ایسی مساوات جس میں کسی نامعلوم مقدار کی زیادہ سے زیادہ قوت ایک ہو تو اسے سادہ مساوات یا یک درجی مساوات کا نام دیا جاتا ہے۔ مثلاً:

(i) $4x + 10 = 0$ (ii) $-2x + 4 = 0$

اس میں x کی زیادہ سے زیادہ قوت ایک ہے۔ اس قسم کی مساوات کی معیاری صورت یہ بنتی ہے۔

$$ax + b = 0$$

یہاں a اور b مستقل مقداریں ہیں۔ مقدار a مثبت بھی ہو سکتی ہے اور منفی بھی لیکن یہ صفر نہیں ہو سکتی $a \neq 0$

• جبکہ b مثبت، منفی یا صفر ہو سکتی ہے۔

(ii) دو درجی مساوات (Quadratic Equation): جب کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی زیادہ سے زیادہ قوت دو ہو تو اسے دو درجی مساوات کا نام دیا جاتا ہے۔ مثلاً:

(i) $x^2 + 2x - 3 = 8$ (ii) $4x^2 - 3x + 10 = 0$

ان میں x کی زیادہ سے زیادہ قوت دو ہے۔ یعنی x^2، $4x^2$ اس قسم کی مساوات کی معیاری صورت یہ ہوتی ہے۔

$$ax^2 + bx + c = 0$$

یہاں $a \neq 0$ جبکہ b, c منفی، مثبت یا صفر ہو سکتے ہیں۔

(iii) سہ درجی مساوات (Cubic Equation): اگر کسی مساوات میں نامعلوم مقدار کی زیادہ سے زیادہ قوت تین ہو تو اسے سہ درجی مساوات کہتے ہیں۔ مثلاً: $x^3 + 2x^2 + 3x - 5 = 0$

اس میں x کی زیادہ سے زیادہ قوت تین یعنی x^3 ہے۔ اس قسم کی مساوات کی معیاری صورت یہ ہوتی ہے۔

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

یہاں $a \neq 0$ جبکہ b, c, d منفی، مثبت یا صفر ہو سکتے ہیں۔

www.downloadclassnotes.com

اسی طرح کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی جتنی قوتیں ہوں گی، اتنی ہی قوتوں والی وہ مساوات کہلائے گی۔

مثلاً: $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 16 = 0$

ایک چہار درجی مساوات ہے۔

$x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3x + 10 = 0$

ایک پانچ درجی مساوات ہے، وغیرہ وغیرہ۔

(3) ہمزاد مساواتیں (Simultaneous Equations): ایسی مساواتیں جن میں نامعلوم مقداروں کی تعداد ایک سے زائد ہو اور ان کی قیمتیں سب مساواتوں پر صادق آئیں ہمزاد مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اس قسم کی مساواتوں میں نامعلوم مقداروں کی مخصوص قیمتیں سب مساواتوں پر مشترکہ طور پر درست ثابت ہوتی ہیں۔ اگر نامعلوم مقداروں کی تعداد دو ہے، تو ایک اور صرف ایک حل سیٹ کے لئے مساواتوں کی تعداد کم از کم دو ہونی چاہیئے اور اگر نامعلوم مقداروں کی تعداد تین ہے۔ تو ایک اور صرف ایک حل سیٹ کے لئے مساواتوں کی تعداد بھی کم از کم تین ہونا ضروری ہے۔ یہ مساواتیں سادہ بھی ہو سکتی ہیں اور دو درجی بھی جیسا کہ درج ذیل مثالوں سے ظاہر ہے۔

(i) $4x + 2y = 16$ (ii) $2x - 4y = 8$

اور

(i) $2x + y = 4$ (ii) $x^2 + 3y^2 = 10$

(4) متماثلہ یا منطبق مساواتیں (Identical Equations): جب کسی مساوات میں موجود نامعلوم مقدار کی ہر قیمت مساوات کا اصل ہو اور کسی بھی صورت میں مساوات کی تردید نہ ہو سکے تو اسے متماثل یا مساوات متماثلہ کہتے ہیں، جبکہ مشروط مساوات کو حل کرنے کے بعد نامعلوم مقدار کی جو قیمت نکلتی ہے، نامعلوم مقدار کی جگہ وہی قیمت درج کرنے سے مساوات صحیح ثابت ہوتی ہے۔ اگر اس قیمت کے علاوہ کوئی اور قیمت لکھ دی جائے تو مساوات غلط ہو جاتی ہے۔ مثلاً $3x = 9$

اس میں x کی قیمت 3 نکلتی ہے۔ لہٰذا اگر x کی جگہ 3 رکھا جائے تو پھر 9 = 9 دونوں اطراف برابر ہوتی ہیں۔ اگر x کی 3 کے علاوہ کوئی اور قیمت درج کی جائے تو مساوات غلط ہو جاتی ہے، لیکن متماثل یا منطبق مساوات کی صورت میں x کو دی گئی ہر قیمت مساوات کی تصدیق کرتی ہے اور ہر قیمت مساوات پر صادق آتی ہے۔ مثلاً

(i) $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab$

(ii) $(x + y)(x - y) \equiv x^2 - y^2$

(iii) $x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2)$

یہ متماثل مساواتوں کی مثالیں ہیں۔ ان میں x اور y کو ہم جو بھی قیمتیں دیں گے، وہ دونوں اطراف پر صادق آئیں گی اور مساوات کی دونوں جانبیں برابر ہوں گی۔ مثلاً:

(i) $(2 + 3)^2 \equiv 4 + 9 + 12$

(ii) $(5)^2 \equiv 25$

$25 \equiv 25$

مساوات کو ہم دو متوازی لکیروں (=) کی علامت سے ظاہر کرتے ہیں، جبکہ متماثل کو ہم تین متوازی لکیروں (≡) سے ظاہر کرتے ہیں۔

علم معاشیات میں متماثل کی اہم مثال بچت اور سرمایہ کاری کی ہے، کیونکہ کینز کے مطابق $S \equiv I$ یعنی بچت اور سرمایہ کاری میں ہمیشہ مماثلت پائی جاتی ہے۔ اسی طرح $MV \equiv PT$ بھی ایک متماثل ہے۔ یعنی نظریہ مقدار زر کے مطابق زر کی طلب اور رسد میں مماثلت موجود ہوتی ہے۔

یک درجی مساواتوں کا حل (Solution of linear Equations):

سب سے پہلے ہم یک درجی یا سادہ مساواتوں کو حل کرنے کا طریقہ بیان کرتے ہیں۔

مثال نمبر1: $5x + 4 = 3x + 12$ کو حل کریں۔

$$5x + 4 = 3x + 12$$

حل: عمل انتقال سے ہم متغیرات والی رقم مثلاً $3x$ کو مساوات کی بائیں جانب لے جاتے ہیں اور ساکنات یعنی خالی مستقل مقداروں کو مساوات کی دائیں جانب ایسا کرتے وقت ارکان کی علامتیں بھی تبدیل کر دیتے ہیں۔ جمع (+) والی علامت مساوی کے نشان کی دوسری طرف جا کر منفی (-) ہو جاتی ہے اور منفی کی علامت جمع (+) بن جاتی ہے۔ اب ہم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$5x - 3x = 12 - 4$$
$$2x = 8$$
$$x = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{تقسیم کرنے سے}$$
$$x = 4$$

پڑتال: ہم اس کی پڑتال بھی کر سکتے ہیں۔ مساوات کو حل کرنے سے x کی قیمت 4 نکلی ہے۔ اگر ہم x کی جگہ اس کی قیمت 4 رکھ دیں تو مساوات کی دونوں اطراف برابر ہونی چاہئیں۔ مثلاً:

$$5x + 4 = 3x + 12$$
$$5(4) + 4 = 3(4) + 12$$
$$20 + 4 = 12 + 12$$
$$24 = 24$$
$$L.H.S = R.H.S$$

پس جواب درست ہے۔

مثال نمبر2:

کو حل کریں $4(2x - 5) = 3(2x + 8)$

بریکٹ کھولنے سے $8x - 20 = 6x + 24$

عمل انتقال سے $8x - 6x = 24 + 20$

$$2x = 44$$
$$x = \frac{44}{2} = 22$$

$$x = 22$$

پڑتال:
اگر ہم x کی جگہ اس کی قیمت 22 رکھ دیں تو مساوات کی دونوں اطراف برابر ہونی چاہیں۔

$$8x - 20 = 6x + 24$$
$$8(22) - 20 = 6(22) + 24$$
$$176 - 20 = 132 + 24$$
$$156 = 156$$
$$L.H.S = R.H.S$$

مثال نمبر3: $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x-1}{4} = \frac{3}{2}$

اس قسم کی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے سب سے پہلے ہم ان کے ذو اضعاف اقل لیتے ہیں اور ذو اضعاف اقل سے ضرب دینے سے۔ اس کا ذو اضعاف اقل 12 ہوگا۔

$$\frac{12(2x-5)}{3} - \frac{12(3x-1)}{4} = \frac{12(3)}{2}$$

$$4(2x-5) - 3(3x-1) = 6(3)$$

$$8x - 20 - 9x + 3 = 18$$

عمل انتقال سے $8x - 9x = 18 + 20 - 3$

$$-x = +35$$

$$x = -35$$

مثال نمبر 4:

$$\frac{3x-5}{6x+10} = \frac{4x+6}{8x-2}$$

آر پار یا چلیپائی ضرب کے طریقہ سے حل کرتے ہیں۔

$$(3x-5)(8x-2) = (4x+6)(6x+10)$$

$$24x^2 - 40x - 6x + 10 = 24x^2 + 36x + 40x + 60$$

$$24x^2 - 46x + 10 = 24x^2 + 76x + 60$$

$$-46x - 76x = 60 - 10$$

$$-122x = 50$$

$$x = -\frac{50}{122}$$

$$x = -\frac{25}{61} \quad \text{or} \quad -0.409$$

مشق نمبر 1

درج ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

(1) $3x + 5 = 20$ (2) $5x - 3 = 2x + 9$

(3) $3x - 12 = 0$ (4) $3x + 17 = 2x + 20$

(5) $3(x-2) = 2(3x-1)$ (6) $3x - 2 = 4x + 3(6x+8)$

(7) $\frac{x-4}{3} - \frac{x-4}{2} = 1$ (8) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{2(4x-8)}{5} = \frac{8(2x-6)}{6}$

(9) $2x + \frac{4-x}{2} = 3x - \frac{8(x-2)}{4}$ (10) $\frac{6x-7}{9} = \frac{2(3x-1)}{5}$

(11) $\frac{1-8x}{4+3x} = \frac{2+16x}{3-6x}$ (12) $\frac{2x-4}{5x+2} = \frac{4x-8}{10x+3}$

(13) $\frac{7x-1}{4} - \frac{1}{3}\left[2x - \frac{1-x}{2}\right] = \frac{19}{3}$ (14) $\frac{5x-2}{3x+1} = \frac{5x-1}{3x+2}$

(15) $\frac{9x-7}{6x+5} = \frac{6x-3}{4x+2}$

جوابات:

(1) $x = 5$ (2) $x = 4$ (3) $x = 4$ (4) $x = 3$ (5) $x = -1\frac{1}{3}$

(6) $x = -1\frac{7}{19}$ (7) $x = -2$ (8) $x = -18$ (9) $x = 4$ (10) $x = \frac{-17}{24}$

(11) $x = \frac{-1}{20}$ (12) $x = 2$ (13) $x = 7$ (14) $x = 1\frac{1}{2}$ (15) $x = \frac{1}{22}$

www.downloadclassnotes.com

دو درجی مساواتوں کا حل

(Solution of Quadratic Equations)

اگر کوئی مساوات دو درجی ہو یعنی اس میں نا معلوم مقدار کی زیادہ سے زیادہ قوت دو ہو تو اسے دو طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔

(i) اجزائے ضربی کا طریقہ — Factorising Method

(ii) فارمولے کے ذریعے — Formula Method

اجزائے ضربی کا طریقہ: عام طور پر دو درجی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے اجزائے ضربی کا طریقہ اختیار کیا جاتا ہے کیونکہ یہ سادہ اور آسان طریقہ ہے، لیکن اگر کوئی مساوات اجزائے ضربی کے ذریعے حل نہ ہو تو پھر اسے فارمولے کے ذریعے حل کیا جا سکتا ہے۔ اجزائے ضربی کے ذریعے حل کرنے کے لئے سب سے پہلے مساوات کو دو درجی مساوات کی معیاری شکل میں لایا جاتا ہے۔

یعنی $ax^2 + bx + c = 0$

سب سے پہلے x^2 کی رقم لکھی جاتی ہے اور اس کا عددی سر a فرض کر لیا جاتا ہے۔ پھر x کی رقم لکھی جاتی ہے اور اس کا عددی سر b فرض کر لیا جاتا ہے۔ پھر خالی رقم یعنی مستقل مقدار رکھی جاتی ہے اور اسے c فرض کیا جاتا ہے۔ a اور c کو آپس میں ضرب دی جاتی ہے اور اس کے ایسے اجزاء بنائے جاتے ہیں کہ اگر انہیں جمع کریں تو وہ b کے برابر ہو جائیں اور اگر ضرب دیں تو وہ $a \times c$ کے برابر ہوں۔ اس طرح سے bx والے حصے کو دو حصوں میں تقسیم کر لیا جاتا ہے اور انہیں حل کرنے کے بعد دونوں حصوں کو صفر کے برابر کر دیا جاتا ہے۔ اس طرح سے مساوات میں x کی دو قیمتیں آتی ہیں اور یہ دونوں قیمتیں مساوات پر صادق آتی ہیں۔ یعنی دونوں قیمتوں سے مساوات صفر کے برابر ہو جاتی ہے۔ اس کی مزید وضاحت مندرجہ ذیل مساوات سے کی جاتی ہے۔

مثال نمبر 1:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

اس مثال میں چونکہ مساوات شروع ہی سے دو درجی مساوات کی ترتیب سے ہے۔ اس لئے اسے ترتیب دینے کی ضرورت نہیں۔ اس میں $a = 2$, $b = 3$ اور $c = -5$ ہے۔ اگر $a \times c$ کا حاصل ضرب دیکھا جائے تو وہ $(2)(-5) = -10$ ہے۔ لہٰذا ہم -10 کے ایسے اجزاء بناتے ہیں، جنہیں اگر ضرب دیں تو -10 بنے اور جمع کریں تو 3 کے برابر ہو۔ یاد رہے کہ $b = 3$ ہے۔ لہٰذا -10 کے دو ممکن جوڑے $(5)(-2)$ ہیں۔ لہٰذا ہم 3 کے بجائے b کی قیمت کو ان جوڑوں کی صورت میں لکھتے ہیں اور مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$2x^2 + (5 - 2)x - 5 = 0$$
$$2x^2 + 5x - 2x - 5 = 0$$
$$x(2x + 5) - 1(2x + 5) = 0$$

اس میں x اور 1 - مشترک نکالا ہے۔

پس $(2x + 5)(x - 1) = 0$

$$2x + 5 = 0$$

یعنی (i) $x = \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$

$$x - 1 = 0$$

(ii) $x = 1$

لہٰذا x کی دو قیمتیں نکلیں گی یعنی $x = -2\frac{1}{2}$ اور $x = 1$

پڑتال: ہم ان دونوں قیمتوں کو باری باری مساوات میں رکھ کر پڑتال بھی کر سکتے ہیں۔ مثلاً:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$x = 1$ رکھنے سے

$$2(1)^2 + 3(1) - 5 = 0$$
$$2 + 3 - 5 = 0$$
$$5 - 5 = 0$$
$$0 = 0$$

اسی طرح $x = -2\frac{1}{2}$ لکھنے سے

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$2\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-5}{2}\right) - 5 = 0$$
$$2\left(\frac{25}{4}\right) - \frac{15}{2} - 5 = 0$$
$$\frac{25}{2} - \frac{15}{2} - 5 = 0$$
$$\frac{25 - 15 - 10}{2} = 0$$
$$25 - 25 = 0$$
$$0 = 0$$

مثال نمبر 2: $2x^2 + 11x + 15 = 0$

$a = 2$ ، $b = 11$ اور $c = 15$ ہے۔

لہٰذا $a \times c = (2)(15) = 30$

پس 11 کے ایسے جوڑے بنائیں جنہیں اگر جمع کیا جائے تو 11 بنے اور اگر ضرب دی جائے تو حاصل ضرب 30 کے برابر ہو۔

پس یہ مطلوبہ جوڑا 6 اور 5 ہوگا۔

مساوات میں b یعنی 11 کے اجزاء درج کرنے سے

$$2x^2 + 11x + 15 = 0$$
$$2x^2 + 6x + 5x + 15 = 0$$
$$2x(x + 3) + 5(x + 3) = 0$$
$$2x + 5 = 0$$
$$2x = -5$$
$$x = \frac{-5}{2} = -2.5$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

www.downloadclassnotes.com

لہٰذا $x = -2.5 \quad x = -3$

پڑتال: مساوات میں x کی دونوں قیمتیں باری باری رکھتے ہیں۔ پہلے x = -2.5 درج کرنے سے۔

$$\begin{aligned}
2x^2 + 11x + 15 &= 0\\
2(-2.5)^2 + 11(-2.5) + 15 &= 0\\
2(6.25) - 27.5 + 15 &= 0\\
12.5 - 27.5 + 15 &= 0\\
27.5 - 27.5 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

اب x = -3 درج کرنے سے

$$\begin{aligned}
2x^2 + 11x + 15 &= 0\\
2(-3)^2 + 11(-3) + 15 &= 0\\
2(9) - 33 + 15 &= 0\\
18 - 33 + 15 &= 0\\
33 - 33 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

مثال نمبر 3: $2\times2 + x - 1 = 0$

a = 2 اور c = -1 پس

a × c کا حاصل ضرب لے کر اس کے اجزاء بنانے کے بعد

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 1 &= 0\\
2x^2 + 2x - x - 1 &= 0\\
2x(x + 1) - 1(x + 1) &= 0\\
(2x - 1)(x + 1) &= 0\\
2x - 1 &= 0\\
2x &= 1\\
x &= \frac{1}{2}\\
x + 1 &= 0\\
x &= -1
\end{aligned}$$

پس $x = \frac{1}{2}$ اور $x = -1$

پڑتال: ہم x کی دونوں قیمتوں کو باری باری مساوات میں رکھ کر دیکھتے ہیں۔

جب x = -1

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 1 &= 0\\
2(-1)^2 + (-1) - 1 &= 0\\
2 - 1 - 1 &= 0\\
2 - 2 &= 0\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

جب $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 1 &= 0\\
2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 &= 0\\
2\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$
$$1 - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

مثال نمبر4:

$$5x2 - 4x = 1$$

حل: معیاری صورت میں لانے کے بعد

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$5x^2 - 5x + x - 1 = 0$$
$$5x(x-1) + 1(x-1) = 0$$
$$(5x+1)(x-1) = 0$$
$$x - 1 = 0, \quad x = 1$$
$$5x + 1 = 0$$
$$5x = -1$$
$$x = -\frac{1}{5}$$

پڑتال: جب $x = 1$

$$5x^2 - 4x = 1$$
$$5(1)^2 - 4(1) = 1$$
$$5 - 4 = 1$$
$$1 = 1$$

جب $x = -\frac{1}{5}$

$$5x^2 - 4x = 1$$
$$5\left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{5}\right) = 1$$
$$5\left(\frac{1}{25}\right) + \frac{4}{5} = 1$$
$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$
$$\frac{1+4}{5} = 1$$
$$\frac{5}{5} = 1$$
$$1 = 1$$

مشق نمبر 2

مندرجہ ذیل سوالات کو بذریعہ اجزائے ضربی حل کریں۔

(i) $x^2 - 2x = 3$ (ii) $x^2 - 4x = 32$
(iii) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (iv) $x^2 + 3x = 4$
(v) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ (vi) $4x^2 - 11x + 6 = 0$
(vii) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (viii) $x^2 + x - 6 = 0$
(ix) $9x^2 - 3x - 6 = 0$ (x) $x^2 - 7x + 12 = 0$

جوابات

(i) $x = 3, -1$ (ii) $x = 8, -4$ (iii) $x = 3, 1$

(iv) $x = 1, -4$ (v) $x = -2, \frac{1}{3}$ (iv) $x = 2, \frac{3}{4}$

(vii) $x = 2, 3$ (viii) $x = -3, 2$ (ix) $x = 1, -\frac{2}{3}$

(x) $x = 3, 4$

فارمولے کے ذریعے دودرجی مساواتوں کا حل
Formula Method

دودرجی مساواتوں کومندرجہ ذیل فارمولے کی مدد سے بھی حل کیا جاتا ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فارمولے کے ذریعے مساوات کوحل کرنے کے لئے ضروری ہوتا ہے کہ پہلے اسے دودرجی مساوات کی معیاری شکل میں لکھا جائے پھر x^2 کے عددی سرکو a، x کے عددی سرکو b اور مستقل مقدار کو c فرض کیا جاتا ہے۔ پھر ان رقموں کو فارمولے میں درج کر کے مساوات کوحل کیا جاتا ہے۔

مثال 1: $x^2 + 3x = 1$ بذریعہ فارمولا حل کیجئے۔

سب سے پہلے ہم اس مساوات کی معیاری صورت لیتے ہیں۔

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

لہٰذا $a = 1$، $b = 3$ اور $c = -1$

اب ہم ان رقموں کو فارمولے میں درج کرتے ہیں۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{-3 + 3.6}{2}; \frac{-3 - 3.6}{2}$$

$$= \frac{.6}{2} = .3 \qquad \frac{-6.6}{2} = -3.3$$

لہٰذا $x = .3$ اور $x = -3.3$

مثال2: بذریعہ فارمولا حل کیجیے۔

$x^2 - 2x = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$ معیاری صورت

$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \mp \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times -3}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$= \frac{2+4}{2}, \quad \frac{2-4}{2}$$

$$= \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{-2}{2} = -1$$

$x = 3, \quad x = -1$

مشق نمبر 3

درج ذیل سوالات کو بذریعہ فارمولا حل کیجیے۔

1- $3x^2 + 4x - 5 = 0$
2- $4x^2 - x - 3 = 0$
3- $x^2 + 12x + 35 = 0$
4- $x^2 + 21x = 46$
5- $4x^2 + 12x = 7$

جوابات:

1- $x = .78, x = -2.12$
2- $x = 1, x = -.75$
3- $x = -5, x = -7$
4- $x = 2, x = -23$
5- $x = .5, x = -3.5$

یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل

یک درجی ہمزاد مساواتوں کو دو طریقوں کی مدد سے حل کیا جا سکتا ہے۔

1- استبدالی طریقہ یا قیمت درج کرنے کا طریقہ Substitution Method

2- ساقط کرنے کا طریقہ۔ Elimination Method

1- استبدالی طریقہ: (Substitution Method)

اس طریقہ کے مطابق کسی ایک مساوات میں ایک نامعلوم مقدار کی قدر دوسری نامعلوم مقدار کی صورت میں معلوم کی جاتی ہے اور اسے دوسری مساوات میں نامعلوم مقدار کی جگہ رکھ کر مساوات کو حل کیا جاتا ہے۔

مثال نمبر1:

i- $5x - 3y = -5$ ii- $2x + y = 9$

مساوات نمبر ii میں y کی قدر x کے لحاظ سے معلوم کرنے پر

$2x + y = 9$
$y = 9 - 2x$

اب y کی جگہ اس قیمت کو مساوات نمبر (i) میں y کی جگہ رکھ کر حل کرنے سے متغیر x کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔

$5x - 3y = -5$
$5x - 3(9 - 2x) = -5$
$5x - 27 + 6x = -5$
$5x + 6x = 27 - 5$
$11x = 22$
$x = 2$

اب x کی یہ قدر مساوات نمبر (i) میں رکھ کر متغیر (y) کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔

$5(2) - 3y = -5$
$10 - 3y = -5$
$-3y = -15$
$3y = 15$
$y = 5$

اگر x کی قدر (2) مساوات (ii) میں رکھی جائے تو پھر بھی y کی قیمت 5 ہی نکلے گی۔

$2x + y = 9$
$2(2) + y = 9$
$4 + y = 9$
$y = 9 - 4$
$y = 5$

مثال نمبر2:

(i) $3x - 2y = 7$ (ii) $2x + 5y = 11$

مساوات نمبر (i) میں x کی قیمت y کے لحاظ سے معلوم کرنے کے لئے

$3x - 2y = 7$
$3x = 7 + 2y$
$x = \dfrac{7 + 2y}{3}$

x کی قیمت کو مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$2\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}y\right) + 5y = 11$

$\frac{14}{3} + \frac{4}{3}y + 5y = 11$

$\frac{14 + 4y + 15y}{3} = 11$

$14 + 4y + 15y = 33$

$14 + 19y = 33$

$19y = 33 - 14$

y کی قیمت مساوات نمبر (1) میں درج کرنے سے x کی قیمت معلوم کی جاتی ہیں۔

$3x - 2(1) = 7$
$3x - 2 = 7$
$3x = 7 + 2$

$$3x = 9$$
$$x = 3$$
$$x = 3\ ,\ y = 1$$

$$19y = 19$$
$$y = \frac{19}{19} = 1$$

2- ساقط کرنے کا طریقہ (Elimination Method): اس طریقہ کے مطابق دونوں نامعلوم مقداروں میں سے کسی ایک کو ساقط (Eliminate) کر دیا جاتا ہے اور جو نامعلوم مقدار باقی رہ جاتی ہے پہلے اس کی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ پھر اسے کسی ایک مساوات میں رکھ کر دوسری اس نامعلوم مقدار کی قدر معلوم کر لی جاتی ہے۔ جسے پہلے ساقط کر دیا گیا تھا۔

مثال نمبر 1:

(i) $2x + 6y = 20$
(ii) $x - 2y = 5$

مساوات نمبر (ii) کو 2 سے ضرب دے کر دونوں مساواتوں میں x کی قیمت برابر کی جاتی ہے تاکہ x کو ساقط کیا جا سکے۔

(i) $2x + 6y = 20$ (ii) $2x - 4y = 10$

مساوات نمبر (i) میں سے نمبر (ii) تفریق کرنے کے لئے نمبر (ii) کے Sign بدل جائیں گے۔

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 2x + 6y = 20 \\ \text{(ii)} & \underline{-2x \mp 4y = 10} \\ & 0 + 10y = 10 \\ & 10y = 10 \\ & y = 1 \end{array}$$

اب y کی یہ قدر مساوات نمبر (ii) میں رکھ کر متغیر x کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔

$$x - 2y = 5$$
$$x - 2(1) = 5$$
$$x - 2 = 5$$
$$x = 5 + 2$$
$$x = 7$$

پس y = 1 اور x = 7 ان ہمزاد مساواتوں کا حل ہے۔

مثال نمبر 2:

(i) $4x + 3y = 7$
(ii) $2x - 2y = 9$

مساوات (ii) کو 2 سے ضرب دینے سے

$$\begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ \underline{-4x \mp 4y = -18} \\ 7y = -11 \\ y = -\frac{11}{7} = -1\frac{4}{7} \end{array}$$

y کی معلوم شدہ قیمت کو مساوات (i) میں رکھنے سے

$$4x + 3\left(-\frac{11}{7}\right) = 7$$
$$4x - \frac{33}{7} = 7$$
$$4x = 7 + \frac{33}{7}$$

دونوں اطراف کو 7 سے ضرب دینے سے

$$28x = 49 + 33$$
$$28x = 82$$
$$x = \frac{82}{28} = \frac{41}{14}$$

پس $y = -1\frac{4}{7}$ اور $x = 2\frac{13}{14}$

مشق نمبر +

درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کریں اور اصل مساواتوں میں x اور y کی قیمتیں رکھ کر پڑتال بھی کریں۔

(1) $2x - y = 3$ $\quad x + 2y = 14$
(2) $3x - 2y = 7$ $\quad x + 2y = 5$
(3) $3x + 4y = 7$ $\quad 2x + y = 3$
(4) $5x + 4y = 220$ $\quad 4x + 5y = 230$
(5) $4x + 5y = 6$ $\quad 3x - 2y = 10$

جوابات:

(1) $x = 4, y = 5$ (2) $x = 3, y = 1$
(3) $x = 1, y = 1$ (4) $x = 20, y = 30$
(5) $x = 2\frac{16}{23}$, $y = -\frac{22}{23}$

ونامعلوم مقداروں والی ہمزاد مساواتوں کا حل: جبکہ ایک مساوات سادہ ہو اور دوسری دو درجی ہو۔

اگر ہمیں ایسی دو مساواتیں دی گئی ہوں جن میں ایک مساوات سادہ اور دوسری دو درجی ہو تو سب سے پہلے ہم سادہ مساوات میں ایک نامعلوم مقدار کی قیمت کو دو درجی مساوات میں درج کر کے اسے ایک نامعلوم مقدار والی دو درجی مساوات کی شکل دیتے ہیں۔ دو درجی مساوات کی شکل اختیار کرنے کے بعد پھر اسے اجزائے ضربی کے طریقے سے یا فارمولے کے طریقے سے حل کیا جاتا ہے۔ اس طرح سے ایک نامعلوم مقدار کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان دونوں قیمتوں کو علیحدہ علیحدہ یک درجی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں دوسری نامعلوم مقدار کی بھی دو قیمتیں حاصل ہو جاتی ہیں۔ اس طرح کی مساواتوں کی چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ دو ایک نامعلوم مقدار کی اور دو دوسری نامعلوم مقدار کی۔ اس کی وضاحت ہم درج ذیل مساوات سے کرتے ہیں۔

مثال نمبر 1:

(i) $x + y = 7$
(ii) $3x^2 + xy - y^2 = 81$

ہم سب سے پہلے y کی قیمت x کے لحاظ سے معلوم کرتے ہیں۔

$$x + y = 7$$
$$y = 7 - x$$

y کی اس قیمت کو مساوات (ii) میں درج کرنے سے

$$3x^2 + x(7 - x) - (7 - x)^2 = 81$$
$$3x^2 + 7x - x^2 - (49 - 14x + x^2) = 81$$
$$3x^2 + 7x - x^2 - 49 + 14x - x^2 - 81 = 0$$
$$3x^2 - 2x^2 + 21x - 130 = 0$$

$x^2 + 21x - 130 = 0$ یہ دو درجی مساوات کی معیاری صورت ہے۔

$a = 1, b = 21, c = -130$ فارمولے سے حل کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-21 \pm \sqrt{(21)^2 - 4(1)(-130)}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 520}}{2}$$
$$= \frac{-21 \pm \sqrt{961}}{2}$$
$$= \frac{-21 \pm 31}{2}$$
$$= \frac{-21 - 31}{2} \quad , \quad \frac{-21 + 31}{2}$$
$$= \frac{-52}{2} \quad , \quad \frac{10}{2}$$
$$= -26 \quad , \quad 5$$

لہٰذا x کی دو قیمتیں 26- اور 5 حاصل ہوئی ہے۔ اب ان دونوں قیمتوں کو باری باری مساوات (i) میں درج کرنے سے y کی دو قیمتیں معلوم کی گئی ہیں۔

$x + y = 7$
$y = 7 - x$
$y = 7 - 5 = 2$
$y = 7 - (-26) = 7 + 26 = 33$

پس

$x = 5, \quad y = 2$
$x = -26 \quad , \quad y = 33$

مثال نمبر 2:

(i) $4xy = -30$
(ii) $5x + 4y = 5$

پہلے ہم مساوات نمبر (ii) میں y کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔

$5x + 4y = 5$
$4y = 5 - 5x$
$$y = \frac{5 - 5x}{4}$$

y کی قیمت مساوات نمبر (i) میں درج کرنے سے

$4xy = -30$
$$4x\left(\frac{5 - 5x}{4}\right) = -30$$
$x(5 - 5x) = -30$
$5x - 5x^2 = -30$

عمل انتقال سے

یا $-5x^2 + 5x + 30 = 0$

5- مشترک نکالنے سے

$x^2 - x - 6 = 0$

اب دو درجی مساوات کی معیاری صورت بن گئی ہے۔ اسے بذریعہ اجزائے ضربی حل کرنے سے۔

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$
$x(x - 3) + 2(x - 3) = 0$
$(x - 3)(x + 2) = 0$

لہٰذا یا تو

$(x+2)=0$

$x=-2$

$(x-3)=0$

$x=3$

پس x کی دو قیمتیں نکل آئی ہیں۔ $x=3$, $x=-2$

ان قیمتوں کو مساوات (ii) میں درج کرنے سے y کی قیمتیں نکل آئیں گی۔

$$5x+4y=5$$
$$4y=5-5x$$
$$y=\frac{5-5x}{4}$$

جب $x=-2$

$$y=\frac{5-5(-2)}{4}$$
$$=\frac{5+10}{4}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

جب $x=3$

$$y=\frac{5-5(3)}{4}$$
$$=\frac{5-15}{4}=\frac{-10}{4}$$
$$y=\frac{-5}{2}=-2\frac{1}{2}$$

لہٰذا

$x=-2$, $y=3\frac{3}{4}$

$x=-3$, $y=-2\frac{1}{2}$

مشق نمبر

درج ذیل ہمزاد مساواتوں کو حل کیجئے۔

(1) $2x^2-4y^2=50$, $x,y=6$

(2) $3x^2+2xy+y^2=80$, $2x-y=4$

(3) $x^2-y^2=106$, $2x-3y=8$

(4) $3x^2+2xy=-8$, $4x=y+13$

(5) $3x^2+2xy+y^2=11$, $3x-4y=19$

جوابات:

(1) $x=5.15$, $y=0.85$
$x=18.8$, $y=-12.8$

(2) $x=3.74$, $y=3.48$
$x=-1.56$, $y=-7.12$

(3) $x=11.425$, $y=4.95$
$x=-17.825$, $y=-14.55$

(4) $x=2$, $y=-5$
$x=\frac{4}{11}$, $y=-11\frac{6}{11}$

(5) $x=1$, $y=-4$
$x=2\frac{23}{81}$, $y=-3\frac{1}{27}$

www.downloadclassnotes.com

تفاعل (Functions)

بعض متغیر مقداروں کا ایک دوسری سے گہرا تعلق ہوتا ہے۔

مثلاً متغیر x کا انحصار متغیر y پر ہو سکتا ہے اور متغیر y کا انحصار متغیر x پر۔ ریاضی کی اصطلاح میں جب کوئی متغیر مقدار کسی دوسری متغیر مقدار پر انحصار کرتی ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ وہ متغیر دوسرے متغیر کا تفاعل ہے۔ مثلاً جب متغیر y کا انحصار متغیر x پر ہوتا ہے تو اس کا مطلب یہ ہے کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔ جس کی تعریف اس طرح سے کی جا سکتی ہے۔

"A Function such as $y = f(x)$ expresses a realationship between two variables (x'y) such that for each value of x' there exists one and only one value of y."

گویا کہ جب کوئی متغیر مقدار کسی دوسری متغیر مقدار پر انحصار رکھتی ہو تو وہ اس کا تفاعل بن جاتی ہے۔ علم معاشیات میں بھی مختلف متغیرات ایک دوسرے پر انحصار رکھتے ہیں، مثلاً صرف اور بچت کا انحصار آمدنی پر ہوتا ہے۔ اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

(i) $C = f(y)$

اور

(ii) $S = f(y)$

یہاں پر C سے مراد صرف (Consumption) ہے اور S سے مراد بچت (Saving) ہے۔ جبکہ y قومی آمدنی کو ظاہر کرتی ہے۔ ان مساواتوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ صرف اور بچت دونوں آمدنی کے تفاعل ہیں۔ آمدنی کے بڑھنے سے صرف اور بچت دونوں میں اضافہ ہو جاتا ہے اور اگر آمدنی کم ہو جائے تو ان دونوں میں کمی واقع ہو جاتی ہے۔

اسی طرح سے جزدی معاشیات میں طلب اور رسد کا انحصار بھی قیمت پر ہوتا ہے۔ جب قیمت بڑھتی ہے تو طلب سکڑ جاتی ہے جبکہ قیمت کم ہونے پر طلب پھیل جاتی ہے۔ اسے ہم اس طرح سے ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$qd = f(p)$$

"Quantity demanded is a funtion of price."

''مقدار طلب قیمت کا تفاعل ہے۔''

اسی طرح رسد کا انحصار بھی قیمت پر ہوتا ہے۔ قیمت کے بڑھنے سے رسد میں اضافہ ہو جاتا ہے اور قیمت کے کم ہونے سے رسد میں کمی آ جاتی ہے۔ اسے ہم اس طرح ظاہر کرتے ہیں:

$$qs = f(p)$$

"Quantity supplied is a function of price."

''مقدار رسد قیمت کا تفاعل ہے۔''

تفاعل کی اقسام (Forms of Functions): تفاعل کی اقسام درج ذیل ہیں۔

1- صریح یا واضح تفاعل (Explicit Functions):

جب کوئی مقدار کلی طور پر کسی دوسری متغیر مقدار پر انحصار رکھتی ہو تو وہ صریح تفاعل کہلاتی ہے۔ مثلاً اگر متغیر Y کا انحصار متغیر X پر ہو تو متغیر Y متغیر X کا صریح تفاعل بنتا ہے۔ اس میں تابع متغیر کو ایک خاص نقطہ نگاہ سے دیکھا جاتا ہے اور آزاد متغیر کو کوئی من مانی قیمت دینے سے تابع متغیر کی ایک مخصوص قیمت نکل آتی ہے۔ صریح تفاعل کی مساوات میں تابع متغیر مساوات کے ایک جانب صرف ایک دفعہ لکھا جاتا ہے۔

مثلاً $Y = f(x)$

اس میں متغیر y متغیر x کا صریح تفاعل ہے۔ جسے مساوات کی صورت میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

(i) $y = 4x + 1$

(ii) $y = 2x^2 + 3x + 5$

(iii) $y = x^3 + 2x^2 - x + 2$

2- مضمر تفاعل (Implicit Functions): جب دو متغیرات کی قیمتوں کا ایک دوسری پر انحصار ہو اور دونوں کا ایک دوسری سے تعلق ہو اور ایک متغیر کو کوئی سی قیمت دینے پر دوسرے متغیر کی قیمت نکل آئے لیکن دونوں متغیرات علیحدہ علیحدہ اپنی حیثیت رکھتے ہو۔ لیکن ایک دوسرے سے لاتعلق نہ ہوں تو یہ مضمر تفاعل کہلاتے ہیں۔

علم معاشیات میں مضمر تفاعل کی واضح مثال آمدنی اور سرمایہ کاری کا تفاعلی رشتہ ہے، کیونکہ یہ دونوں ایک دوسرے پر انحصار رکھتے ہیں۔ یعنی $I = f(y)$ Investment is function of income

3- معکوس تفاعل (Inverse Functions): ایک تفاعل کے جو دو صریح تفاعل بنتے ہیں، وہ ایک دوسرے کا معکوس تفاعل بن جاتے ہیں۔

مثلاً:

(i) $y = f(x)$

اور (ii) $x = f(y)$

یہ دونوں ایک دوسرے کا معکوس تفاعل ہیں۔

$$p = 5 - \frac{1}{10} qd$$

4- تکثیری تفاعل (Increasing Functions): اگر کسی تابع متغیر y میں تبدیلی اسی سمت میں آئے جس سمت میں کہ آزاد متغیر x میں تبدیلی واقع ہوئی ہے تو تابع متغیر y آزاد متغیر x کا تکثیری تفاعل ہوگا۔ مثلاً x کی قیمت بڑھنے سے y کی قیمت بڑھ جائے اور x کی قیمت میں کمی سے y کی قیمت کم ہو جائے۔

معاشیات میں قیمت اور رسد کا تعلق تکثیری تفاعل کہلاتا ہے۔ کیونکہ قیمت کے بڑھنے سے رسد میں اضافہ ہو جاتا ہے اور قیمت کم ہونے سے رسد میں کمی آ جاتی ہے۔ یعنی $qs = f(p)$ ایک تکثیری تفاعل ہے۔

اسی طرح سے آمدنی کا صرف اور بچت کے ساتھ تکثیری تفاعلی رشتہ ہے۔ کیونکہ آمدنی کے بڑھنے کے ساتھ صرف اور بچت دونوں میں اضافہ ہو جاتا ہے یعنی:

(i) $C = f(y)$

اور

(ii) $S = f(y)$ دونوں تکثیری تفاعل ہیں۔

5- تقلیلی تفاعل (Decreasing Functions): جب آزاد متغیر x کی قیمت بڑھنے سے تابع متغیر y کی قیمت کم ہو جائے اور متغیر x کی قیمت کم ہونے سے متغیر y کی قیمت بڑھ جائے تو متغیر y متغیر x کا تقلیلی تفاعل کہلاتا ہے۔ طلب کا قانون معاشیات میں تقلیلی تفاعل کو ظاہر کرتا ہے کیونکہ قیمت میں اضافہ کی وجہ سے طلب کم ہو جاتی ہے اور قیمت میں کمی طلب میں اضافے کا باعث بنتی ہے۔ پس $qd = f(p)$

6- یک قیمت تفاعل (Single Valued Functions): اگر آزاد متغیر x کو کوئی قیمت دینے سے تابع متغیر y کی صرف ایک ہی قیمت آئے تو اسے یک قیمت یا یک قدر تفاعل کہا جاتا ہے۔ مثلاً:

(i) $y = 3x - 2$

(ii) $y = 4x^2 - x + 5$

ان مثالوں میں x کو جو بھی قیمت دی جائے۔ اس کے مقابلے میں y کی صرف ایک ہی قیمت آئے گی۔ لہٰذا یہ یک قدر تفاعل کی مثالیں ہیں:۔

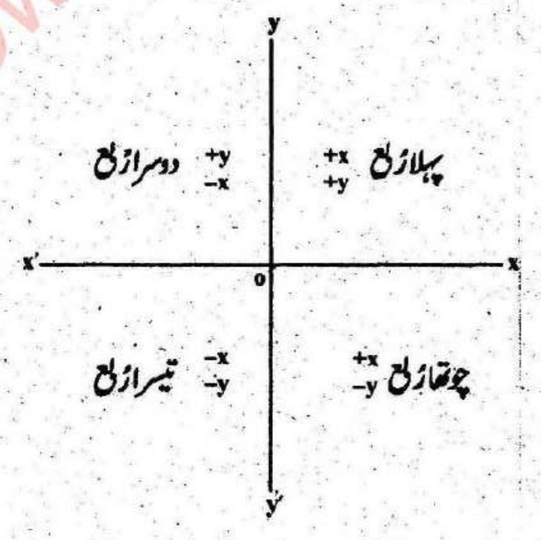
7- کثیر القیمت تفاعل (Multi Valued Functions): بعض تفاعل ایسے ہوتے ہیں کہ اگر ان میں آزاد متغیر x کو کوئی من مانی قیمت دی جائے تو اس کے مدمقابل متغیر y کی ایک سے زیادہ قیمتیں آتی ہیں۔ ایسے تفاعل کو کثیر القیمت تفاعل کہتے ہیں۔ اس کی وضاحت ہم ایک مثال سے کرتے ہیں۔ مثلاً:

$$y^2 = x^2$$

اس میں اگر ہم y کی قیمت دریافت کرنا چاہیں تو ہمیں x کا جذر لینا پڑے گا۔ ہمیں پتہ نہیں کہ x^2 ، +x کا مربع ہے یا -x کا۔ اس لئے ہم x کی قیمت کو $\pm x$ لکھیں گے یعنی x جمع بھی ہوسکتا ہے اور منفی بھی۔ پس ایسے تفاعل جن کی ایک سے زیادہ قیمتیں نکلیں کثیر القیمت تفاعل کہلاتے ہیں۔

تفاعل کی گرافی تعبیر
(Graphic Representation of Functions)

ریاضی میں ہم تفاعل کی وضاحت گراف کے ذریعے بھی کرسکتے ہیں۔ گراف بنانے کے لئے ہم گراف پیپر پر دو خطوط کھینچتے ہیں۔ ایک افقی جسے x - Axis کہا جاتا ہے اور دوسرا عمودی جسے y - Axis نقطہ 0 ابتدائی نقطہ کہلاتا ہے اور یہ اس جگہ ہوتا ہے جہاں پر دونوں خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ x, ox کی مثبت قدروں کو ظاہر کرتا ہے' جبکہ 'ox پر ہم x کی منفی قیمتوں کی پیمائش کرتے ہیں' اس طرح y , oy کی مثبت قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے' جبکہ 'y, oy کی منفی قیمتوں کی نشاندہی کرتا ہے۔ گراف کے چار حصے بن جاتے ہیں اور ہر حصے کو ربع (Quadrant) کہتے ہیں۔ پہلے ربع میں x اور y دونوں کی مثبت قیمتوں کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ دوسرے ربع میں x کی منفی اور y کی مثبت قیمتیں درج ہوتی ہیں۔ تیسرے ربع میں دونوں کی منفی قیمتیں ظاہر کی جاتی ہیں اور چوتھے ربع میں x کی مثبت اور y کی منفی قیمتیں ظاہر کی جاتی ہیں' جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے:



گراف بناتے وقت ہم x اور y کی دونوں قیمتوں کو اکٹھا لے کر ایک نقطہ جسے ہم Co-ordinate کہتے ہیں' حاصل کرتے ہیں۔ مثلاً اگر 4 = x اور 6 = y ہو تو یہ نقطہ پہلے ربع میں آئے گا۔ ہم سب سے پہلے x کی قدر 4 تک لیں گے' پھر اوپر y کی جانب 6 تک گنتی کریں گے۔ یہی وہ نقطہ ہے جہاں پر x کی قیمت 4 اور y کی قیمت 6 ہو گی اور اس طرح سے تمام نقاط لے کر ان نقاط کو آپس میں ملا دیں گے اور یہ تفاعل کا مطلوبہ گراف ہو گا۔ ذیل میں ہم چند ریاضیاتی تفاعل کے گراف بناتے ہیں۔

یک درجی مساوات کا گراف (Graph of linear equation): اگر ہمیں درج ذیل یک درجی تفاعل دیا گیا ہو۔

$$y = 4x - 1$$

اس کا طریقہ یہ ہے کہ ہم ایک گوشوارہ بناتے ہیں' جس میں x کی قیمت منفی تین 3- سے مثبت 3+ تک رکھتے ہیں۔ x کی ان فرضی قیمتوں کے مقابل ہم y کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$y = 4x - 1$

(i) $y = 4(-3) - 1 = -12 - 1 = -13$

(ii) $y = 4(-2) - 1 = -8 - 1 = -9$

(iii) $y = 4(-1) - 1 = -4 - 1 = -5$

(iv) $y = 4(0) - 1 = 0 - 1 = -1$

(v) $y = 4(1) - 1 = 4 - 1 = 3$

(vi) $y = 4(2) - 1 = 8 - 1 = 7$

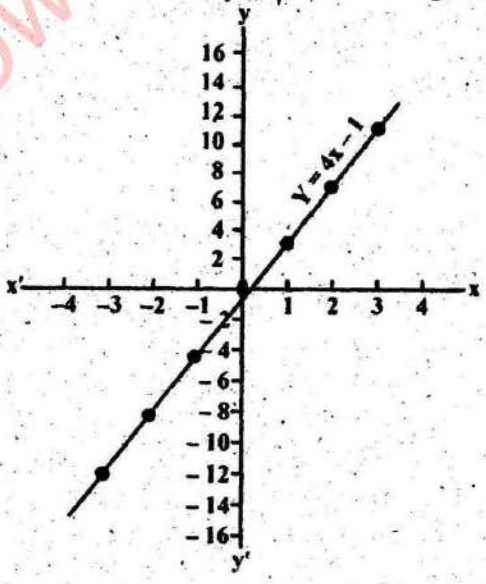
(vii) $y = 4(3) - 1 = 12 - 1 = 11$

اب ان قیمتوں کی مدد سے گراف تیار کر کے مساوات کی گرافی تعبیر کرتے ہیں۔

X	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y	–13	–9	–5	–1	3	7	11

$y = 4x - 1$

گوشوارے میں x اور y کی درج شدہ قیمتوں کا اگر گراف بنایا جائے تو اس طرح سے ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے' چونکہ یہ یک درجی تفاعل ہے' اس لئے اس کا گراف خط مستقیم ہی بنے گا۔



شماریاتی تصورات (Statistical Concepts)

شماریات کا مفہوم (Concept of Statistics): شماریات ایک لاطینی لفظ سٹیٹس (Status) سے اخذ کیا گیا ہے۔ جس کے لغوی معنی ''ریاست'' ہیں پُرانے وقتوں میں حکمران اپنی آمدنی، زرعی پیداوار اور جنگی ساز وسامان سے متعلق اعداد و شمار فراہم کرنے کے لئے ''شماریات'' کی مدد لیتے تھے۔ اب اس میں کافی ترقی ہوئی ہے اور نئے نئے طریقے استعمال کئے جاتے ہیں۔ شماریات کو انگریزی میں Statistics کہتے ہیں، جسے ''واحد'' اور ''جمع'' دونوں معنوں میں لیا جاتا ہے۔

اس کے ''واحد'' کے مفہوم سے مراد ''ایسے شماریاتی طریقے اور عام اصول لئے جاتے ہیں جو مواد اکٹھا کرنے، ترتیب دینے اور تجزیہ کرنے کے لئے استعمال میں لائے جائیں۔''

''جمع'' کے مفہوم میں اس سے مراد ''کسی تحقیق سے متعلق ترتیب وار اکٹھا کیا ہوا مواد ہے۔'' مختلف ماہرین نے شماریات کی تعریف اپنے اپنے انداز میں بیان کی ہے۔

یول اور کینڈل کے مطابق ''شماریات سے وہ مقداری مواد مراد ہے جو تعداد کثیر سے متاثر ہوتا ہے۔''

وبسٹر Webster لکھتے ہیں:

''شماریات سے مراد مقداری نوعیت کے ایسے ترتیب شدہ حقائق لئے جاتے ہیں جو لوگوں کی کسی خاص حالت کا اظہار کرتے ہیں۔''

اے۔ایل۔بولے A.L.Bouley رقم طراز ہیں:

''شماریات گنتی کی سائنس ہے۔''

دورِ جدید کے ماہرین شماریات کی تعریف ان الفاظ میں بیان کرتے ہیں۔

''شماریات کی سائنس ایسے عددی بیانات کی مظہر ہے۔ جن کا تجزیہ اور تحقیق کی جاسکتی ہے۔ اس میں ان اصولوں کا مطالعہ کیا جاتا ہے جو تحقیقی مواد اکٹھا کرنے، پیش کرنے، تجزیہ کرنے اور توضیح کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

شماریات کی اقسام (Classification of Statistics): شماریات کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

1- شماریاتی طریقے Statistical Methods 2- اطلاقی طریقے Applied Methods

1- شماریاتی طریقے: کسی تحقیق سے متعلق جو ابتدائی مواد فراہم ہوتا ہے۔ وہ کافی پیچیدہ اور بے ترتیب ہوتا ہے۔ اسے شماریاتی طریقے سے سادہ اور واضح شکل میں پیش کیا جاتا ہے تاکہ اسے عام لوگ آسانی سے سمجھ سکیں۔ شماریاتی طریقہ میں ایسے اصول اور طریقے زیر بحث آتے ہیں جو کسی تحقیق سے متعلق تعدادی مواد اکٹھا کرنے، جماعت بندی کرنے، جدول سازی کرنے، موازنہ کرنے اور توضیح کرنے میں رہنمائی کر سکیں تاکہ ان اعداد و شمار کے پیش نظر مستقبل کے بارے میں پیش بینی کی جاسکے۔

2- اطلاقی طریقے: جب ان شماریاتی اصولوں کا اطلاق کسی خاص مسئلہ کے تجزیہ پر کیا جاتا ہے تو اسے اطلاقی شماریات کہتے ہیں۔ مثلاً پاکستان میں پچھلے بیس سالوں میں قیمتوں میں اضافہ معلوم کرنے کے لئے جو

مخصوص طریقے استعمال کیئے جائیں گے وہ اطلاقی شماریات کے زمرے میں آئیں گے۔ اطلاقی شماریات صفاتی بھی ہو سکتی ہے اور سائنسی بھی۔ ہم سب سے پہلے اس بات کی وضاحت کرتے ہیں کہ یہ اعداد و شمار کس طرح اکٹھے کیئے جاتے ہیں اور ان کی تدوین و ترتیب کس طرح کی جاتی ہے۔ اس کے بعد ان کے مابین تعلقات کی مختلف صورتوں کی وضاحت کریں گے۔

تعدادی مواد کی فراہمی (Collection of data): کسی تحقیق کے سلسلے میں بنیادی کام ضروری شماریاتی مواد کی فراہمی ہوتا ہے۔ کیونکہ کسی بھی مسئلہ سے متعلق ضروری نتائج اخذ کرنے ہوں تو متعلقہ معلومات حاصل کرنا ضروری ہوتی ہیں۔ شروع میں یہ معلومات غیر واضح اور پیچیدہ شکل میں ہوتی ہیں لہٰذا انہیں ترتیب دینا ضروری ہوتا ہے۔ ضروری مواد کی فراہمی کے وقت اس بات کی تسلی کر لینی چاہیے کہ یہ حقائق پر مبنی ہے کیونکہ صحیح نتائج اخذ کرنے کے لئے تعدادی مواد کی صحت کو پرکھنا ضروری ہوتا ہے۔

تعدادی مواد کی اقسام (Classification of Data)

I- ابتدائی تعدادی مواد Primary Data 2- ثانوی تعدادی مواد Secondary Data

1- ابتدائی تعدادی مواد (Primary Statistical Data): اس سے ایسا تعدادی مواد مراد لیا جاتا ہے جو پہلی بار اکٹھا کیا گیا ہو۔ یہ خام مواد کی صورت میں ابتدائی حالت میں ہوتا ہے۔ اسے تجزیہ کے لئے استعمال کرنے سے پہلے شماریاتی طریقوں سے گزارنا ضروری ہوتا ہے۔

ابتدائی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے: ابتدائی مواد کئی طریقوں سے اکٹھا کیا جاتا ہے۔ یہ جاننے کے لئے کہ کون سا طریقہ زیادہ مناسب ہوگا۔ تحقیق کے مقصد اور نوعیت کو پیش نظر رکھنا ضروری ہوگا۔

1- معلومات کی براہ راست فراہمی (Direct personal observation): اس طریقہ کے تحت معلومات اکٹھا کرنے والے افراد ذاتی طور پر متعلقہ لوگوں سے ملاقات کر کے ضروری معلومات حاصل کرتے ہیں۔ اس ضمن میں یہ ضروری ہے کہ معلومات اکٹھا کرنے والے افراد غیر جانبدار اور خوش اخلاق ہوں۔ لوگوں کا ان پر اعتماد ہو۔ سوالات عام فہم اور سادہ ہوں اور تحقیق کا دائرہ محدود ہو۔

2- معلومات کی بالواسطہ فراہمی (Indirect Personal observation): اگر متعلقہ افراد تک براہ راست رسائی ممکن نہ ہو تو ایسے افراد کی معرفت معلومات حاصل کی جاتی ہیں جو تحقیقی مسئلہ سے متعلق آگاہی رکھتے ہوں اور اپنی واقفیت کی بناء پر صحیح معلومات فراہم کر سکیں۔ مثلاً قریبی دوست، ہمسائے وغیرہ لیکن ایسے لوگوں کیلئے ضروری ہے کہ وہ غیر جانبدار ہوں اور مسائل سے متعلق آگاہی رکھتے ہوں۔

3- سوالناموں کے ذریعے (Through Questionnaire): بعض اوقات سوالناموں کے ذریعے بھی ضروری معلومات فراہم کی جاتی ہیں۔ اس کا طریقہ کار یہ ہوتا ہے کہ مناسب اور معیاری سوالات کی ایک فہرست تیار کر لی جاتی ہے جسے سوالنامہ کہتے ہیں۔ یہ سوالنامہ افراد کو بھیج دیا جاتا ہے اور ان سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے پُر کر کے بواپسی ڈاک روانہ کر دیں۔ اس ضمن میں ضروری ہے کہ:

1- سوالات عام فہم اور سادہ ہوں۔
2- سوالنامہ جامع ہو اور مسئلہ کے تمام پہلوؤں پر روشنی ڈالے۔
3- سوالنامے میں لوگوں کے ذاتی پوشیدہ مسائل کا ذکر نہ ہو۔

4- سوالنامہ مختصر ہو اور ''ہاں'' یا ''نہیں'' میں جواب طلب کئے گئے ہوں۔

5- لوگ پڑھے لکھے اور ذمہ دار ہوں تا کہ سوالنامہ پُر کرنے کے بعد اسے واپس بھیج سکیں۔

اگر لوگ ذمہ داری کا ثبوت نہ دیں اور سوالنامہ واپس نہ کریں تو وقت اور وسائل کا زیاں ہوتا ہے۔

4۔ تربیت یافتہ محققین کے ذریعے (Through investigation enumerators):

اس مقصد کے لئے ایک اور راستہ اختیار کیا جاتا ہے کہ یہ سوالنامہ شمار کنندہ کی معرفت بھیجا جاتا ہے تا کہ پُر کروانے کے بعد وہ دستی واپس لے آئے۔ شمار کنندہ اس سوالنامے کا مقصد بتا کر لوگوں کو اعتماد میں لیتا ہے اور ان سے صحیح جوابات حاصل کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ مردم شماری کے لئے عام طور پر یہ طریقہ اختیار کیا جاتا ہے۔ تربیت یافتہ لوگوں کو اس طرح صحیح معلومات حاصل ہو جاتی ہیں۔

5- مقامی نامہ نگاروں کے ذریعے (Through local Press Media):

بعض اوقات مقامی رپورٹروں کے ذریعے بھی معلومات حاصل کی جاتی ہیں۔ لیکن یہ طریقہ زیادہ قابل اعتماد نہیں ہوتا کیونکہ مسائل کے بارے میں صرف عام اندازے ہی لگائے جا سکتے ہیں اور معلومات کی صحیح فراہمی نہیں ہوتی۔ ویسے یہ طریقہ سستا ہے۔

6- رجسٹریشن کے ذریعے:

محقق اپنی معلومات کے حصول کے لیے متعلقہ محکمہ سے رجسٹریشن کے ذریعے حاصل کر سکتا ہے جیسے میونسپل کمیٹی، پولیس سٹیشن، ہسپتال وغیرہ سے براہ راست مواد حاصل کر سکتا ہے۔

2- ثانوی تعدادی مواد (Secondary statistical data)

یہ ایسا مواد ہوتا ہے جس کو پہلے بھی کسی نے اکٹھا کیا ہو اور کم از کم ایک بار شماریاتی تجزیہ سے گزر چکا ہو۔ یہ موزوں طور پر مرتب شدہ ہوتا ہے اور اسے تحقیق کے لئے استعمال میں لایا جا سکتا ہے۔

ثانوی مواد اکٹھا کرنے کے طریقے (Methods of Collecting Secondary Data):

ثانوی تعدادی مواد دو صورتوں میں ملتا ہے۔

1- طبع شدہ مواد Printed Matter   2- غیر طبع شدہ مواد Non-Printed Matter

1- طبع شدہ مواد کے ذرائع (Sources of Printed matter):

(الف) مرکزی، صوبائی اور مقامی حکومتوں کی مطبوعات جیسے وفاقی شماریاتی محکمے، صوبائی، لوکل گورنمنٹ کے محکمے اور وفاقی محکمے، مالیات، ریلوے اور بیورو آف شماریات وغیرہ۔

(ب) غیر سرکاری و نیم سرکاری اداروں کی مطبوعات مثلاً سٹیٹ بینک آف پاکستان، واپڈا، میونسپل کمیٹی، پی آئی ڈی سی، ضلعی کونسل وغیرہ۔

(ج) امداد باہمی کی انجمنوں، ٹریڈ یونینوں اور بیمہ کمپنیوں و بنکوں کی مطبوعات۔

(د) تحقیقی مطبوعات جو کہ تحقیق کرنے والوں نے جمع کی ہوں۔ مثلاً یونیورسٹی کے ادارہ تعلیم و تحقیق، ادارہ تحقیقات آبپاشی، ٹیکسٹ بک بورڈز وغیرہ۔

(ر) چیمبرز آف کامرس، سٹاک ایکسچینج اور تجارتی مطبوعات۔

(س) بیرونی ممالک اور بین الاقوامی اداروں کی مطبوعات مثلاً بین الاقوامی زری فنڈ I.M.F عالمی ادارہ صحت W.H.O عالمی

بنک اور اقوام متحدہ U.N.O کے اداروں کی مطبوعات۔

(ک) رسالہ جات اور اخبار۔

2- غیر طبع شدہ مطبوعات کے ذرائع (Sources of Non-Printed matter): ثانوی تعدادی مواد غیر مطبوعہ صورت میں لیبر ڈیپارٹمنٹ، رجسٹریشن ڈیپارٹمنٹ، ٹریڈ ایسوسی ایشن اور محققین سے مل سکتا ہے۔

تعدادی مواد کی جدول بندی
(Tabulation of Data)

جدول بندی کی اقسام (Kinds of Tabulation): تعدادی مواد کو ترتیب وار منظم کر کے باقاعدہ لائنوں اور قطاروں میں پیش کرنے کے عمل کو "جدول بندی" کہا جاتا ہے۔ اس میں سوالات کے ترتیب وار جوابات درج کئے جاتے ہیں جو مخصوص نتائج اخذ کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ جدول بندی کرنے سے پہلے زیر تحقیق مسئلہ کی نوعیت، مقصد اور وسعت کو پیش نظر رکھنا پڑتا ہے۔

1- سادہ جدول: Simple Table   2- مرکب یا پیچیدہ جدول: Complex Table

1- سادہ جدول (Simple Table) سادہ جدول بندی ایک یا ایک سے زائد ایسے سوالات کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے جو علیحدہ علیحدہ نوعیت کے ہوتے ہیں اور جن کا آپس میں کوئی تعلق نہیں ہوتا۔

2- مرکب یا پیچیدہ جدول (Complex table) ایسی جدول بندی جو اعداد کی ایک سے زائد خصوصیات ظاہر کرتی ہے اور اس میں ایسے سوالات کا جواب ہوتا ہے، جن کا آپس میں گہرا تعلق ہو۔

شماریاتی جدول کی ترتیب

1- یکطرفہ جدول (One-Side Table) اس میں تعدادی مواد کی خصوصیات کی وضاحت سوالات کے جوابات سے کی جاتی ہے مثلاً اگر ہمیں گورنمنٹ کالج برائے خواتین سرگودھا کی طالبات کا جدول بنانا ہو تو اسے درج ذیل صورت میں تیار کیا جاتا ہے۔

نام جماعت	طالبات کی تعداد
سال اوّل	1000
سال دوئم	950
سال سوئم	550
سال چہارم	500

2- دوطرفہ جدول:(Two-Side Table) ایسا جدول دو باہمی تابع سوالات کے متعلق معلومات فراہم کرتا ہے۔ مثلاً ہر جماعت میں سالانہ امتحان میں پاس اور فیل شدہ طالبات کا جدول۔

نام جماعت	پاس	فیل	کل تعداد
سال اول	800	200	1000
سال دوئم	700	250	950
سال سوئم	450	100	550
سال چہارم	350	150	500
میزان	2300	700	3000

سہ طرفہ جدول:(Three-Side Table) اس میں تین تابع سوالات کے جوابات ملتے ہیں مثلاً دوطرفہ جدول میں اگر ہر جماعت مین سائنس اور آرٹس کی پاس اور فیل شدہ طالبات کا اندراج کر دیا جائے تو یہ سہ طرفہ جدول ہوگا۔

نام جماعت	سائنس			آرٹس			مجموعی تعداد
	پاس	فیل	کل تعداد	پاس	فیل	کل تعداد	
سال اول	325	75	400	450	150	600	1000
سال دوئم	300	100	400	400	150	550	950
سال سوئم	150	50	200	225	125	350	550
سال چہارم	140	60	200	200	100	300	500
میزان	915	285	1200	1275	525	1800	3000

4- کثیر طرفہ جدول:(Multi-Side Table) اس میں بے شمار باہمی سوالات کے متعلق معلومات حاصل ہوتی ہیں۔

جدول بندی کے اصول (Principles of Tabulation)

کسی بھی جدول کی تیاری میں مندرجہ ذیل اصولوں کو مدنظر رکھنا چاہیے۔

1- جدول واضح، آسان اور عام فہم ہونا چاہیے۔

2- جدول کا عنوان جلی حروف میں واضح طور پر لکھا جانا چاہیے۔

3- جدول کا عنوان ایسا ہونا چاہیے کہ پورے جدول کی نمائندگی کرے۔ اگر تعدادی مواد بہت زیادہ مقدار میں ہو تو اسے کئی ایک جدولوں سے ظاہر کرنا چاہیے جو مقصد کو پورا کر سکیں۔

-4 جدول کا سائز کاغذ کے مطابق ہونا چاہیے۔
-5 جدول میں اہم عنوانات کی تعداد محدود ہونی چاہیے۔
-6 تعدادی مواد کی بڑی جماعت بندی کو موٹی لکیروں اور جماعتوں کی ذیلی تقسیم کو باریک لکیروں سے ظاہر کرنا چاہیے۔
-7 جن کالموں کا مقابلہ کرنا ہو وہ ایک دوسرے کے سامنے ہونے چاہئیں۔
-8 ہر عنوان کی پیمائش کی اکائیاں درج کرنی چائیں۔ جیسے گندم کے لئے ٹن، دودھ کے لئے لیٹر اور کپڑے کے لئے میٹر وغیرہ۔
-9 جدول بندی سے پہلے تعدادی مواد کا تخمینہ کر لینا چاہیے۔
-10 مقابلہ میں آسانی کی خاطر مختلف مدّوں کو حروف تہجی یا سائز کے مطابق ترتیب دینا چاہیے۔
-11 کالم کے عنوان اور ذیلی عنوان واضح ہونے چاہئیں۔
-12 سطور کا مجموعہ دائیں طرف کے سب سے آخری کالم میں اور کالموں کا مجموعہ جدول کے نچلے حصے میں درج کرنا چاہیے۔
-13 مقابلے میں آسانی کی خاطر مدّات کو تاریخ وار یا جغرافیائی لحاظ سے مرتب کرنا چاہیے۔
-14 جن اعداد پر زیادہ زور دینا مقصود ہو انہیں دائرے میں یا جلی خطوط کے درمیان رکھ کر ظاہر کرنا چاہیے۔

جدول بندی کے فوائد (Advantages of Tabulation)

جدول بندی کے کئی فائدے ہوتے ہیں مثلاً:

-1 بے ترتیب اور پیچیدہ مواد کو باقاعدہ ترتیب دے کر جدول کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے جس سے متعلق سوالات کے جوابات ملتے ہیں۔
-2 جدول بندی میں تمام مواد واضح اور جامع صورت میں موجود ہوتا ہے جس سے کم وقت میں صحیح نتائج اخذ کئے جا سکتے ہیں۔
-3 جدول بندی تعدادی مواد کا تجزیہ کرنے میں مدد دیتی ہے۔
-4 غلطیوں کا امکان کم ہو جاتا ہے۔
-5 تعدادی مواد سے متعلق تمام پہلو اُجاگر ہو جاتے ہیں۔

اہم مشقی سوالات

نوٹ: پنجاب کے تمام بورڈز بشمول آزاد کشمیر بورڈ میں 2011ء سے لیکر 2019ء تک آنے والے کثیر الانتخابی سوالات (MCQ's) بھی شامل کر دیئے گئے ہیں۔

معروضی سوالات: Objective Questions

سوال 1: ہر سوال کے چار ممکنہ جوابات دیئے گئے ہیں درست جواب کو مارکر یا پین سے بھر دیا گیا ہے۔

1۔ ایسی علامتیں جو کسی بحث کے دوران قابل قبول مختلف قدروں کا مجموعہ اختیار کر سکتی ہوں کہلاتی ہیں۔

(A) مستقلات (B) متبدلات [redacted] متغیرات (D) ساکنات

2۔ متغیر مسلسل ہے۔

(A) قیمت (B) آمدنی (C) طلب [redacted] وقت

3۔ متغیر غیر مسلسل ہے۔

(A) وقت (B) درجہ حرارت [redacted] طلب (D) سپیڈ

4۔ .... مسلسل متغیر کی مثال ہے۔

(A) قیمت (B) طلب [redacted] کار کی سپیڈ (D) رسد

5۔ y = f(x) میں y کی کیا حیثیت ہے۔

[redacted] تابع متغیر (B) آزاد متغیر (C) متغیر مسلسل (D) کوئی حیثیت نہیں

6۔ ایسی مقداریں جو کسی خاص وقت میں معین یا ساکن فرض کر لی جائیں کہلاتی ہیں۔

(A) مستقلال (B) متغیرات [redacted] پیرامیٹرز (D) عددی سر

7۔ ایسی مقداریں جو عملی زندگی میں تبدیل ہوتی رہتی ہیں لیکن کسی بحث کے دوران انہیں معین فرض کر لیا جاتا ہے کہلاتی ہیں۔

(A) مستقلات [redacted] متبدل مستقلات (C) ساکنات (D) متغیرات

8۔ اگر دو متغیر X اور Y ہوں اور Y کی قدر کا انحصار X کی قدر پر ہو تو اس تفاعلی رشتہ کو کس طرح لکھتے ہیں۔

[redacted] y = f(x) (B) y + f(x) (C) x + f(y) (D) x = f(y)

9۔ کون سا انگریزی کا حرف برآمدات کی نمائندگی کرتا ہے۔

(A) Y (B) N [redacted] X (D) E

10۔ .... حرف برآمدات کو ظاہر کرتا ہے۔

[redacted] M (B) X (C) Y (D) C

11۔ ریاضیاتی معاشیات میں آمدنی کے لئے علامت استعمال ہوتی ہے۔

(A) L (B) Qd (C) P [redacted] Y

12۔ مساوات جس میں متغیرات کی ہر قیمت درست ثابت ہو کہلاتی ہے۔

[redacted] ہمزاد مساوات (B) مشروط مساوات (C) متماثلہ مساوات (D) سادہ مساوات

13۔ ایسی مساوات جس میں نا معلوم مقدار کی ہر فرضی قیمت طرفین کو برابر کر دے کون سی مساوات ہوگی۔

(A) سادہ مساوات (B) ہمزاد مساوات

[redacted] مساوات متماثلہ (D) تیسرے درجے کی مساوات

14۔ ایسی مساواتیں جن کی نا معلوم قدروں کی حل شدہ قدریں بیک وقت تمام مساواتوں پر صادق آتی ہیں کہلاتی ہیں۔

[redacted] ہمزاد مساواتیں (B) سہ درجی مساواتیں

(C) دو درجی مساواتیں (D) یک درجی مساواتیں

15۔ .... مساوات کا گراف خط مستقیم ہوتا ہے۔

[redacted] یک درجی (B) دو درجی (C) سہ درجی (D) ہمزاد

www.downloadclassnotes.com

16۔ ذیل میں سے کون سی مساوات دو درجی مساوات کی معیاری صورت ہے۔
(A) $ax + bx + x = 0$ (B) $ax + bx + cx = 0$
(C) $ax + bx + c = 0$ (D) $ax+bx+c = 0$

17۔ یک درجی مساوات کا خط کس شکل کا ہوتا ہے۔
(A) خط مستقیم (B) دائروی (C) شلجمی (D) بیضوی

18۔ دو درجی مساوات کے گراف کی شکل ہوتی ہے۔
(A) خط مستقیم (B) بیضوی (C) افقی (D) U شکل

19۔ سہ درجی مساوات میں متغیر کی بلند ترین طاقت ہوتی ہے۔
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

20۔ آزاد اور تابع متغیر کے درمیان باہمی تعلق کے اظہار کے لئے استعمال ہوتا ہے۔
(A) ربط (B) تفاعل (C) جدول (D) خط

21۔ اگر آزاد اور تابع متغیر ایک دوسرے کی مخالف سمت میں حرکت کریں تو ایسے تفاعلی رشتہ کو کہتے ہیں۔
(A) یکسانی تفاعل (B) قلیلی تفاعل (C) تکثیری تفاعل (D) مستقل تفاعل

22۔ ایک مضمر تفاعل کے جو دو صریح تفاعل بنتے ہیں ان کا آپس میں کیا تعلق ہوتا ہے۔
(A) معکوس تفاعل (B) تکثیری تفاعل (C) مستقل تفاعل (D) خارجی تفاعل

23۔ آمدنی (Y) سرمایہ کاری (I) ایک دوسرے کے کس تفاعل کی وضاحت کرتے ہیں۔
(A) تکثیری تفاعل (B) تقلیلی تفاعل (C) مضمر تفاعل (D) صریح تفاعل

24۔ اگر آزاد اور تابع متغیر کی قیمتیں ایک دوسرے کے معکوس ہوں تو کون سا تفاعلی رشتہ ہوگا۔
(A) تقلیلی (B) تکثیری (C) مضمر (D) صریح

25۔ ذیل میں سے کون سا ذریعہ تعدادی مواد اکٹھا کرنے سے متعلق نہیں ہے۔
(A) سوالنامہ کے ذریعے (B) تحقیقی مطبوعات ذریعے
(C) رجسٹریشن کے ذریعے (D) ذاتی مشاہدہ کے ذریعے

26۔ تعدادی مواد کو منظم طور پر افقی اور عمودی کالموں میں ترتیب دینے کے عمل کو کہتے ہیں۔
(A) ثانوی مواد (B) اعشاری مواد (C) جدول بندی (D) شماریاتی مواد

27۔ تعدادی مواد کو سطروں اور کالموں میں لکھنے کا نام ہے۔
(A) جماعت بندی (B) جدول بندی (C) اعشاری عدد (D) ابتدائی مواد

28۔ ایسا جدول جو اعداد کی ایک سے زیادہ خصوصیات کو ظاہر کرے کیا کہلاتا ہے۔
(A) سادہ جدول (B) یکجہتی جدول (C) مرکب جدول (D) منفرد جدول

www.downloadclassnotes.com

Descriptive Part انشائیہ

نوٹ: پنجاب کے تمام بورڈز بشمول آزاد کشمیر بورڈ میں 2011ء سے لیکر 2018ء تک پوچھے جانے والے مختصر سوالات (Short Cuestions) بھی شامل کر دیئے گئے ہیں۔

پارٹ I:

سوال 4: مختصر جواب لکھیں۔

1۔ متغیرات سے کیا مراد ہے؟

ج: ایسی مقداریں جو تبدیل ہوتی رہیں اور مختلف قیمتیں اپنا سکیں متغیرات کہلاتی ہیں۔ مثلاً درجہ حرارت، وقت اور گاڑی کی رفتار وغیرہ معاشیات میں طلب، رسد، قیمت، آمدنی، بچت وغیرہ متغیر مقداریں ہیں

2۔ آزاد اور تابع متغیر میں کیا فرق ہے؟

ج: آزاد یا تابع متغیر ایسے متغیر کو کہتے ہیں جو کسی بحث کے دوران آزادانہ طور پر کسی دوسرے متغیر کی تبدیلی کے بغیر اپنی قدر یا قیمت کو تبدیل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔

(qd=f(q میں (p) ایک آزاد متغیر ہے

3۔ مسلسل اور غیر مسلسل متغیر میں کیا فرق ہے؟

ج: ایسا متغیر جو اپنی قدروں کو تبدیل کرت وقت اپنے سلسلہ حدود میں کسی بھی قدر کو چھوڑ کر نہ گزرے اور اپنے سلسلہ حدود میں کوئی وقفہ نہ چھوڑے تو یہ مسلسل متغیر کہلاتا ہے۔

اس کے برعکس جب کوئی متغیر اپنی قدریں بدلتے وقت اپنے سلسلہ حدود کے اندر کچھ قدروں یا قیمتوں کو نہ اپنائے اور چھوڑ کر گزر جائے تو اسے متغیر غیر مسلسل کہتے ہیں۔

4۔ بدل پذیر مستقلات یا پیرامیٹرز سے کیا مراد ہے؟

ج: یہ ایسی مقداریں ہوتی ہیں جو عملی زندگی میں تو تبدیل ہوتی رہتی ہیں لیکن مخصوص حالات میں انہیں بدستور (ساکن) فرض کر لیا جاتا ہے۔ مثلاً قانون طلب کو درست ثابت کرنے کے لئے صارفین کی پسند، عادات اور فیشن (T)، صارفین کی تعداد (N) صارف آمدنی (Y) اور متبادل اشیاء کی قیمتیں (pi) کو بدستور فرض کیا جاتا ہے جو کہ پیرامیٹرز کہلاتے ہیں۔ حالانکہ عملی زندگی میں یہ تبدیل ہوتے رہتے ہیں۔

5۔ ساکنات سے کیا مراد ہے؟

ج: ایسی مقداریں جن کی قدریں ہمیں معلوم ہوں یعنی وہ مستقل رہیں اور ان میں کوئی تبدیلی نہ آئے مستقل مقداریں یا ساکنات کہلاتی ہیں۔ یہ متغیر کا الٹ ہیں۔

6۔ مساوات سے کیا مراد ہے؟

ج: مساوات سے مراد دو جملوں کا آپس میں برابر ہوتا ہے۔ یعنی جب دو جبری جملے ایک دوسرے کے برابر ہوں اور مساوی (=) کی علامت سے منسلک ہوں یا ایک جملہ صفر کے برابر ہو تو اسے مساوات کہا جاتا ہے۔

7۔ ارکان کے لحاظ سے جملے کی اقسام بتائیں؟

ج: ارکان کے لحاظ سے جملے کی تین اقسام ہیں۔

① **ثنائی جملہ:** ایسا جملہ جس کے صرف دو ارکان ہو مثلاً $3X-2$

② **ثلاثی جملہ:** ایسا جملہ جو تین ارکان پر مشتمل ہو مثلاً $x2+rx+1$

③ **کثیر الارکان جملہ:** ایسا جملہ جو چار یا اس سے زائد ارکان پر مشتمل ہو۔

8۔ قوت نما اور عددی سر میں کیا فرق ہے؟

ج: عددی سر سے مراد وہ عدد ہے۔ جو کسی نامعلوم مقدار کے بائیں جانب ہوتا ہے اس سے مراد یہ ہے کہ عدد کو اتنی بار جمع کیا گیا ہے۔ مثلاً $4x2 + 3x + 10 = 0$ میں 4 اور 3 عددی سر ہیں۔ $4x2$ سے مراد ہے کہ $x2$ کو چار بار جمع کی گیا ہے یعنی $4x2 = x2 + x2 + x2 + x2$ اور $3x$ کا مطلب ہے کہ x کو تین بار جمع کیا گیا ہے۔

یعنی $3x = x + x + x$

اس سے مراد وہ عدد جو کسی نامعلوم مقدار کے اوپر دائیں جانب لکھا جاتا ہے۔ مثلاً $x5$ کا مطلب یہ ہے کہ x کی قوت پانچ ہے۔ یعنی x کو آپس میں پانچ بار ضرب دی گئی ہے۔ یعنی $x5 = x . x . x . x . x$

9۔ مساوات کی اقسام تحریر کریں؟

ج: مساوات کی چار اقسام ہیں۔

① نامعلوم مقداروں کی تعداد کے مطابق ② نامعلوم مقداروں کی قوتوں کے مطابق

③ ہمزاد مساواتیں ④ متماثلہ یا منطبق مساواتیں

10۔ یک درجی مساوات سے کیا مراد ہے؟

ج: ایسی مساوات جس میں کسی نامعلوم مقدار کی زیادہ سے زیادہ قوت ایک ہو تو اسے سادہ مساوات یا یک درجی مساوات کا نام دیا جاتا ہے۔

11۔ دو درجی مساوات کی معیاری حالت لکھیں؟

ج: جب کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی زیادہ سے زیادہ قوت دو ہو تو اسے دو درجی مساوات کا نام دیا جاتا ہے۔ مثلاً (i)۔ $x2 + 2x - 3 = 8$ (ii)۔ $4x2 - 3x + 10 = 0$ ان میں x کی زیادہ سے زیادہ قوت دو ہے۔ یعنی $4x2, x2$ اس قسم کی مساوات کی معیاری صورت اور حالت یہ ہوتی ہے۔ $ax2 + bx + c = 0$

12۔ دو درجی مساوات کو حل کرنے کا فارمولا لکھیں؟

ج:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

13۔ ہمزاد مساوات سے کیا مراد ہے؟

ج: ایسی مساواتیں جن میں نامعلوم مقداروں کی تعداد ایک سے زیادہ ہو اور ان سب کا ایک حل ہو انہیں ہمزاد مساواتیں کہا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر کسی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی تعداد ہو تو ان کے حل کے لئے مساواتوں کی تعداد بھی دو ہوتی ہے۔

14۔ مساوات کی رمزی علامات بتائیں؟

ج: مساوات کی رمزی کی علامات درج ذیل ہیں۔

① نامعلوم یا مجہول مقدار ② معلوم مقداریں یا ساکنات
③ عددی سر ④ قوت یا قوت نما

15۔ مشروط مساوات اور مساوات متماثلہ میں فرق بتائیں؟

ج: مشروط مساوات سادہ مساوات ہی ہوتی ہے۔ اسے حل کرنے کے بعد نامعلوم مقدار کی جو قیمت نکلتی ہے مساوات میں وہی قیمت درج کرنے سے وہ صحیح ثابت ہوتی ہے۔ مثلاً 3x = 9 اس میں x = 3 ہوگا لیکن جب کسی مساوات میں موجود نامعلوم مقدار کی ہر قیمت مساوات کا اصل ہو اور کسی بھی صورت میں مساوات کی تردید نہ ہو سکے تو اسے متماثل یا مساوات متماثلہ کہا جاتا ہے۔ مثلاً (x + y) (x - y) = x2 - y2

16۔ تفاعل کا مفہوم بتائیں؟

ج: جب کوئی متغیر مقدار کسی دوسری متغیر مقدار پر انحصار رکھتی ہے تو وہ اس کا تفاعل بن جاتی ہے اور سے تفاعلی رشتہ کا نام دیا جاتا ہے۔ مثلاً متغیر y کا انحصار متغیر x پر ہو تو y=f(x) ہوگی۔ اسی طرح طلب (qd) کا انحصار قیمت (p) پر ہوتا ہے۔ لہٰذا qd=f(p) یعنی شے کی مقدار طلب، قیمت کا تفاعل ہوتی ہے۔

17۔ تفاعل کی کوئی سی چار اقسام تحریر کریں؟

ج: تفاعل کی چار اقسام درج ذیل ہیں۔

① صریح تفاعل ② مضمر تفاعل ③ تقلیلی تفاعل ④ تکثیری تفاعل

18۔ صریح اور مضمر تفاعل میں فرق بتائیں؟

ج: جب کوئی متغیر مقدار کلی طور پر کسی دوسری متغیر مقدار پر انحصار رکھتی ہے تو وہ اس کا صریح تفاعل کہلاتا ہے۔ مثلاً y=f(x) متغیر y، متغیر x کا صریح تفاعل ہے۔ جب دو متغیرات کی قیمتوں کا ایک دوسری پر انحصار ہو اور دونوں کا ایک دوسرے سے تعلق ہو تو یہ مضمر تفاعل کہلاتے ہیں۔ مثلاً xy=12

19۔ تقلیلی اور تکثیری تفاعل میں کیا فرق ہے؟

ج: جب آزاد متغیرات کی قیمت کم ہونے پر تابع متغیر کی قیمت بڑھ جائے اور آزاد متغیر کی قیمت زیادہ ہونے پر تابع متغیر کی قیمت کم ہو جائے۔ یعنی دونوں میں معکوس تعلق پایا جائے۔ مثلاً qd=f(p) تو اسے تقلیلی تفاعل کہا جاتا ہے لیکن جب آزاد تابع متغیرات کی قیمتوں میں ایک ہی سمت میں تبدیلی واقع ہو تو تابع متغیر y، آزاد متغیر x کا تکثیری تفاعل ہوگا مثلاً qs=f(p) یا c=f(y) وغیرہ

20۔ شماریات سے کیا مراد ہے؟

ج: شماریات ایک ایسا علم ہے جو کسی شعبہ کی تحقیق کیلئے اعداد و شمار اکٹھا کرنے اور تجزیہ کرنے میں مدد دے۔

21۔ شماریات کی کتنی اقسام ہیں؟

ج: شماریات کی دو اقسام ہیں۔

① شماریاتی طریقے ② اطلاقی طریقے

22۔ ابتدائی تعدادی مواد کی فراہمی کے ذرائع بتائیں؟

ج: ابتدائی تعدادی مواد کی فراہمی کے ذرائع درج ذیل ہیں۔

① **معلومات کی براہ راست فراہمی:** ذاتی طور پر متعلقہ لوگوں سے ملاقات کر کے ضروری معلومات حاصل کرنا

② **معلومات کی بالواسطہ فراہمی:** ایسے افراد کی معرفت جو تحقیقی مسئلہ سے آگاہی رکھتے ہوں، اپنی واقفیت، دوست، ہمسائے

ہونے کی وجہ سے صحیح معلومات فراہم کر سکیں۔

③ **تربیت یافتہ محققین کے ذریعے:** ایک سوالنامہ جو کہ شمار کنندہ کی معرفت بھیجا جاتا ہے۔

④ **مقامی نامہ نگاروں کے ذریعے:** مقامی رپوٹروں کے ذریعے جو معلومات حاصل ہو سکیں۔

23۔ ابتدائی تعدادی مواد اور ثانوی تعدادی مواد میں کیا فرق ہے؟

ج: ابتدائی تعدادی مواد سے مراد ہے جو کسی شخص یا ادارے نے ابتدائی طور پر پہلی بار اکٹھا کیا ہو اور ترتیب نہ دیا ہو۔ جبکہ ثانوی تعدادی مواد سے مراد ایسا مواد ہے۔ جو کسی شخص یا ادارے نے ابتدائی طور پر حاصل نہ کیا ہو بلکہ پہلے سے کسی اور مقصد کے لئے اکٹھا کیا گیا ہو اور شماریاتی مراحل سے گزر چکا ہو ثانوی مواد کہلاتا ہے۔

24۔ ابتدائی تعدادی مواد اکٹھا کرنے کے چار طریقے لکھیں؟

ج: ابتدائی تعدادی مواد اکٹھا کرنے کے چار طریقے درج ذیل ہیں۔

① ذاتی مشاہدہ ② بالواسطہ ذاتی مشاہدہ ③ سوالناموں کو ذریعے ④ رجسٹریشن

25۔ جماعت بندی سے کیا مراد ہے؟

ج: تعدادی مواد کو مشترکہ خصوصیات کی بناء پر مختلف گروہوں میں ترتیب دینے کے عمل کو جماعت بندی کہا جاتا ہے

26۔ جماعت بندی کی اقسام تحریر کریں؟

ج: جماعت بندی کی دو اقسام ہیں۔

① صفاتی جماعت بندی ② عددی یا مقداری جماعت بندی

27۔ جدول بندی سے مراد ہے؟

ج: تعدادی مواد کو ترتیب وار منظم کر کے باقاعدہ لائنوں اور قطاروں میں پیش کرنے کے عمل کو "جدول بندی" کہا جاتا ہے۔ جدول بندی سے پہلے زیر تحقیق مسئلہ کی نوعیت، مقصد اور وسعت کو پیش نظر رکھنا چاہیئے۔

28۔ سادہ جدول بندی اور پیچیدہ جدول بندی میں کیا فرق ہے؟

ج: سادہ جدول بندی ایک یا ایک سے زائد ایسے سوالات کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔ جو علیحدہ علیحدہ نوعیت کے ہوتے ہیں۔ اور جن کا آپس میں کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ ایسی جدول بندی جو اعداد کی ایک سے زائد خصوصیات ظاہر کرتی ہے۔ اور اس میں ایسے سوالات کا جواب ہوتا ہے، جن کا آپس میں گہرا تعلق ہو

29۔ جدول بندی کے پانچ اصول لکھیں؟

ج: جدول بندی کے پانچ اصول درج ذیل ہیں۔

① جدول واضح، آسان اور عام فہم ہونا چاہیئے۔

② جدول کا عنوان جلی حروف میں واضح طور پر لکھا جانا چاہیئے۔

③ جدول کا عنوان ایسا ہونا چاہیئے کہ پورے جدول کی نمائندگی کرے۔ اگر تعدادی مواد بہت زیادہ مقدار میں ہو تو اسے کئی ایک جدولوں سے ظاہر کرنا چاہیئے جو مقصد کو پورا کر سکیں۔

30۔ جدول بندی کے چار فوائد تحریر کریں؟

ج: جدول بندی کے چار فوائد درج ذیل ہیں۔

① بے ترتیب اور پیچیدہ مواد کو باقاعدہ ترتیب دے کر جدول کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے جس سے متعلق سوالات کے جوابات ملتے ہیں۔

② جدول بندی میں تمام مواد واضح اور جامع صورت میں ہوتا ہے۔ جس سے کم وقت میں صحیح نتائج اخذ کیے جا سکتے ہیں۔
③ جدول بندی تعدادی مواد کا تجزیہ کرنے میں مدد دیتی ہیں۔
④ غلطیوں کا امکان کم ہو جاتا ہے
⑤ تعدادی مواد سے متعلق تمام پہلو اجاگر ہو جاتے ہیں۔

پارٹ II: انشائیہ Descriptive Part

-1 متغیرات سے کیا مراد ہے۔ ان کی اقسام بیان کریں۔
-2 درج ذیل میں فرق بتائیں۔
(الف) متغیرات اور ساکنات (ب) متغیرات اور متبدل مستقلات (پیرامیٹرز)
-3 کلی اور جزوی معاشیات کے اہم متغیرات کے باہمی رشتوں کی وضاحت کریں۔
-4 مساوات سے کیا مراد ہے۔ اس کی رمزی علامات اور اقسام بتائیں۔
-5 درج ذیل پر مختصر نوٹ لکھیں۔
(الف) مشروط مساوات (ب) مساوات متماثلہ (ج) ہمزاد مساواتیں
-6 $y = 8 - 2x$ یک درجی مساوات دی گئی ہے۔ اس کا گراف تیار کریں۔
-7 شماریات کی تعریف کریں۔ نیز شماریاتی مواد جمع کرنے کے طریقے بتائیں۔
-8 جدول بندی سے کیا مراد ہے۔ اس کی مختلف اقسام بیان کریں۔
-9 نوٹ لکھیں۔
(i) جدول بندی کے اصول (ii) جدول بندی کے فوائد

www.downloadclassnotes.com