

اس یونٹ کو مکمل کرنے کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ جہاں $a \neq 0$ اور b, c حقیقی اعداد ہوں، کو بذریعہ تجزی، دو درجی کلیہ، تکمیل مربع اور گراف کے ذریعے حل کر سکیں۔

نقطہ تقاطع کو گراف کی مدد سے معلوم کر سکیں جب تقاطع:

- ایک درجی تقاطع اور محدوداتی محوروں کے درمیان ہو۔
- دو ایک درجی تقاطعوں کے درمیان ہو۔
- ایک درجی اور دو درجی تقاطع کے درمیان ہو۔

دو درجی تقاطع $y = ax^2 + bx + c$ جہاں $a \neq 0$ اور b, c حقیقی اعداد ہوں، کا گراف بنا سکیں اور وضاحت کر سکیں۔

دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق قائم کر سکیں۔

روٹس کو ایسے جاننے پر دو درجی مساوات بنا سکیں۔

فرق کنندہ کے ذریعے دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت کی شناخت کر سکیں۔

ایک نامعلوم متغیر والی دو درجی غیر مساوات کو حل کر سکیں۔

ایسے سوالات کو حل کر سکیں جن میں کسی کلیے کا سبجیکٹ تبدیل کرنا ہو۔

کسری مساواتوں کو حل کر سکیں جو دو درجی مساوات میں تبدیل ہو سکتی ہوں۔

دو درجی مساواتوں اور غیر مساواتوں کے تصورات کو حقیقی دنیا کے مسائل پر لاگو کر سکیں (جیسے طبیعیات، انجینئرنگ اور مالیات میں، یعنی پروجیکٹائل حرکت میں زیادہ سے زیادہ کم سے کم اونچائیوں کا حساب لگانا، کسی کمپنی کے بجٹ پر زیادہ سے زیادہ قیمت کا تعین کرنا، آبادی کے استحکام کا روبرواری ترقی، کام کے وقت اور اجرت کے درمیان تعلق وغیرہ)۔

دو درجی مساوات (Quadratic Equation)

2.1

دو درجی مساوات ایک متغیر میں درجہ دو کی کثیر رقمی مساوات ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل مساواتیں دو درجی مساواتیں ہیں:

(i) $2x^2 + 3x + 7 = 0$ (ii) $x^2 - 5x - 4 = 0$ (iii) $3y^2 - 6y + 3 = 0$

نوٹ:

• اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں دو درجی مساوات کی معیاری شکل کہا جاتا ہے۔

• اگر $a = 0$ ہو تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ایک ایک درجی مساوات $bx + c = 0$ بن جاتی ہے۔

• اگر $b = 0$ ہو، تو مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ ایک خالص دو درجی مساوات $ax^2 + c = 0$ بن جاتی ہے۔

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا حل، جہاں $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$ (Solution of Quadratic Equation)

(a) بذریعہ تجزی:

تجزی کے ذریعے دو درجی مساوات کا حل درج ذیل اصول پر مبنی ہوتا ہے:

اگر $(x+l)(x+m)=0$ ہو تو $x+l=0$ یا $x+m=0$ جہاں $l, m \in \mathbb{R}$ ہے۔ اسے صفر حاصل ضرب خاصیت کہا جاتا ہے۔

مثال 1: تجزی کے طریقہ سے حل کیجیے: $x^2 + \frac{7}{3}x = 2$

$$x^2 + \frac{7}{3}x = 2$$

حل:

$$3x^2 + 7x = 6 \text{ سے (دونوں اطراف 3 سے)}$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 0 \text{ (ضرب دینے سے)}$$

$$3x^2 + 9x - 2x - 6 = 0$$

$$3x(x+3) - 2(x+3) = 0$$

$$(x+3)(3x-2) = 0$$

اب آیا کہ عا $3x - 2$ یا $x + 3$ صفر ہے تو پھر ان کا حاصل ضرب صفر ہے۔ لہذا،

$$x + 3 = 0 \text{ یا } 3x - 2 = 0$$

$$x = -3 \text{ یا } x = \frac{2}{3}$$

پس $\left\{-3, \frac{2}{3}\right\}$ حل سیٹ ہے۔

مثال 2: تجزی کے طریقہ سے حل کیجیے: $\frac{2x+3}{2} = \frac{4x-6}{x}, x \neq 0$

حل: (دونوں اطراف مخرجوں کے ذواضعاف اقل یعنی $2x$ سے

ضرب دینے سے)

$$\frac{2x+3}{2} = \frac{4x-6}{x}$$

$$\frac{2x(2x+3)}{2} = \frac{(4x-6)(2x)}{x}$$

$$2x^2 - 3x = 8x - 12$$

$$2x^2 - 3x - 8x + 12 = 0$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$2x^2 - 8x - 3x + 12 = 0$$

$$2x(x-4) - 3(x-4) = 0$$

$$(2x-3)(x-4) = 0$$

$$2x-3=0 \text{ یا } x-4=0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ یا } x = 4$$

پس $\left\{\frac{3}{2}, 4\right\}$ حل سیٹ ہے۔

تمام ارکان کو '=' کی علامت کے بائیں جانب منتقل کرنا ہے۔

(b) بحلیل مربع کے طریقہ سے دو درجی مساوات کا حل:

مثال 3: بحلیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے: $3x^2 - 32 = -10x$

$$3x^2 - 32 = -10x \text{ حل:}$$

مرحلہ I: اس میں مختلف کیجیے کہ x اور x^2 والی رقوم ایک طرف اور x کے بغیر والی رقم دوسری طرف ہوں۔

$$3x^2 + 10x = 32$$

مرحلہ II: x^2 کے عددی سر کو مثبت اور ایک بنانے کے لیے دونوں اطراف x^2 کے عددی سر سے تقسیم کیجیے۔

$$x^2 + \frac{10}{3}x = \frac{32}{3}$$

مرحلہ III: مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کے نصف کا مربع جمع کیجیے۔

$$x^2 + \frac{10}{3}x + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{32}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{32}{3} + \frac{25}{9} = \frac{96 + 25}{9} = \frac{121}{9}$$

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$$

مرحلہ IV: دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\pm \left(x + \frac{5}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

$$x + \frac{5}{3} = \pm \frac{11}{3}$$

$$x + \frac{5}{3} = \frac{11}{3} \quad \text{یا} \quad x + \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$x = \frac{11}{3} - \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{11}{3} - \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{11-5}{3} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-11-5}{3}$$

$$x = \frac{6}{3} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-16}{3} = -5\frac{1}{3}$$

$$x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -5\frac{1}{3}$$

پس $\left\{2, -5\frac{1}{3}\right\}$ حل سیٹ ہے۔

خود آزمائی!

مکمل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

(i) $5x^2 - 18 = 2x$

(ii) $2x^2 - 7x = -20$

(i) $5x^2 - 18 = 2x$

$$5x^2 - 18 = 2x$$

$$\frac{5x^2}{5} - \frac{18}{5} = \frac{2}{5}x$$

مساوات کے دونوں اطراف 5 سے تقسیم کریں (x^2 کے عددی سر سے)

حل:

$$x^2 - \frac{18}{5} = \frac{2}{5}x$$

$$x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{18}{5}$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کے نصف کا مربع یعنی $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ کو جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{18}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{18}{5} + \frac{1}{25}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{90+1}{25} = \frac{91}{25}$$

مساوات کے دونوں اطراف کا جذر مربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{25}}$$

$$\left(x - \frac{1}{5}\right) = \pm \frac{\sqrt{91}}{5}$$

$$x = \frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{91}}{5} = \frac{1 \pm \sqrt{91}}{5}$$

حل سیٹ = $\left\{ \frac{1 \pm \sqrt{91}}{5} \right\}$

(ii) $2x^2 - 7x = -20$

حل: مساوات کے دونوں اطراف $2(x^2 \text{ کا عددی سر})$ سے تقسیم کریں۔

$$\frac{2}{2}x^2 - \frac{7}{2}x = \frac{-20}{2}$$

$$x^2 - \frac{7}{2}x = -10$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کے نصف کا مربع یعنی $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = -10 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = -10 + \frac{49}{16}$$

$$\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{-160+49}{16} = \frac{-111}{16}$$

مساوات کے دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{-111}{16}}$$

$$x - \frac{7}{4} = \pm \frac{\sqrt{-111}}{4}$$

$$x = +\frac{7}{4} \pm \frac{\sqrt{-111}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{-111}}{4}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{7 \pm \sqrt{-111}}{4} \right\}$$

چیلنج!

ہر حقیقی عدد کا مربع غیر منفی ہوتا ہے اور اس لیے صفر سے بڑا ہوتا ہے۔ پس $(a - b)^2$ غیر منفی یعنی $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ ہوتا ہے۔ کیا آپ متفق ہیں کہ:

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq (0)^2$$

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2 \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

حل:

دونوں اطراف 2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{2}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

جی ہاں! ہم متفق ہیں۔

(C) دو درجہ کلیہ کی مدد سے دو درجہ مساوات کا حل:

دو درجہ کلیہ کو بذریعہ تکمیل مربع اخذ کرنا

مناسب تخفیف اور تبدیلی کے بعد ہر دو درجہ مساوات کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ $ax^2 + bx + c = 0$ ، جہاں a, b, c حقیقی اعداد ہوں۔ جب کہ $a \neq 0$

ہم مساوات کو یوں بھی لکھ سکتے ہیں:

مرحلہ I: $ax^2 + bx = -c$

مرحلہ II: مساوات کے دونوں اطراف a (x² کے عددی سر) سے تقسیم کرنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

یاد رکھیے!

$ax^2 + bx + c = 0$ کو اس طرح بھی لکھا جاتا ہے:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{جب } a \neq 0$$

مرحلہ III: مساوات کے دونوں اطراف $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ جمع کرنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

مرحلہ IV: دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\pm \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(ٹرانسپوزیشن)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یہ دو درجی کلیہ ہے۔

مثال 4: دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے: $3x^2 + 7x - 6 = 0$

حل:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0$$

(دیا گیا ہے)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(معیاری شکل)

دی گئی مساوات اور معیاری شکل کا موازنہ کرنے سے

$$a = 3, b = 7, c = -6$$

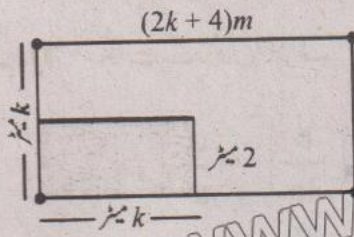
a, b, c کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(3)(-6)}}{2(3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm 11}{6} = \frac{-7 + 11}{6}, \frac{-7 - 11}{6} = \frac{4}{6}, \frac{-18}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3}, -3$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{2}{3}, -3 \right\}$$



سرگرمی

کرن کے گھر کے سامنے ایک مستطیل نما باغ ہے جس کی لمبائیاں $(2k + 4)$ میٹر اور k میٹر ہیں۔ ایک چھوٹا مستطیل نما حصہ جس کی لمبائیاں k میٹر اور 2 میٹر ہیں، اس کو ہموار کر دیا گیا ہے غیر ہموار حصے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل:

$$\text{باغ کی لمبائی } (\ell) = 2k + 4 \text{ m}$$

$$\text{باغ کی چوڑائی } (w) = k \text{ m}$$

$$\text{باغ کا رقبہ} = \ell \times w$$

$$= (2k + 4)(k)$$

$$= (2k^2 + 4k) \text{ m}^2$$

$$\text{ہموار حصہ کی لمبائی} = k \text{ m}$$

$$\text{ہموار حصہ کی چوڑائی} = 2 \text{ m}$$

$$\text{ہموار حصہ کا رقبہ} = k \text{ m} \times 2 \text{ m}$$

$$= 2k \text{ m}^2$$

$$\text{غیر ہموار حصہ کا رقبہ} = \text{کل رقبہ} - \text{ہموار حصہ کا رقبہ}$$

$$= 2k^2 + 4k - 2k$$

$$= (2k^2 + 2k) \text{ m}^2$$

$$= 2k(k + 1) \text{ m}^2$$

(d) دو درجی مساوات کا حل بذریعہ گراف

دو درجی مساوات کو حل کرنے کے لیے گراف کی مدد سے ان نقاط کو معلوم کرنا ہوتا ہے جہاں اس کا گراف محور کو قطع کرتا ہے ان نقاط کی x ۔ قدریں دو درجی مساوات کا حل ہوتی ہیں۔ اگر دو درجی مساوات میں x^2 کا عددی سر مثبت ہو تو گراف کی شکل کا ہوگا اور اگر دو درجی مساوات میں x^2 کا عددی سر منفی ہو تو گراف کی شکل کا ہوگا۔ دو درجی تفاعل کا گراف بنانے کے لیے ہم تکمیل مربع کے طریقہ سے اس کا x معلوم کرتے ہیں۔

$a(x - h)^2 + k$ کو دو درجی تفاعل کی راسی شکل کہا جاتا ہے جس میں (h, k) راس ہے اور a ، x^2 کا عددی سر ہے۔

کیا آپ جانتے ہیں؟

دو درجی تفاعل کا گراف پیرابولا (Parabola) کہلاتا ہے۔

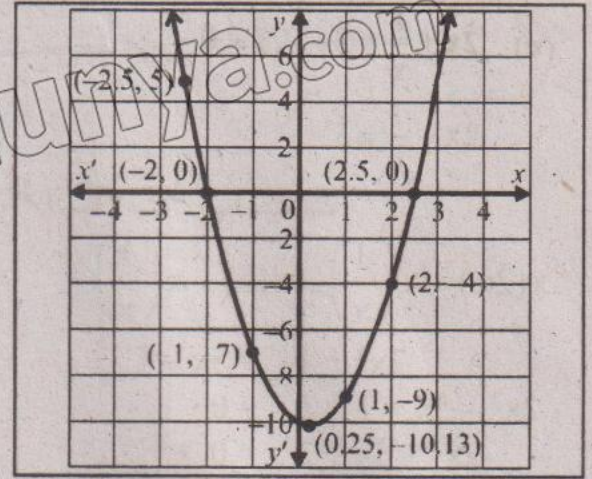
مثال 5: (i) دو درجی تفاعل $y = 2x^2 - x - 10$ کا گراف بنائیے اور وضاحت کیجیے۔

(ii) دو درجی مساوات $2x^2 - x - 10 = 0$ کو گراف کی مدد سے حل کیجیے۔

حل: (i) آئیے $y = 2x^2 - x - 10$ کا گراف بناتے ہیں۔

$$y = 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 5\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5 \right] \\
&= 2 \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 5 \right] \\
&= 2 \left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} \right] = 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{2(81)}{16} \\
&= 2 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{81}{8} = 2(x - 0.25)^2 - 10.13
\end{aligned}$$



اس کا موازنہ $y = a(x - h)^2 + k$ سے کریں۔ لہذا $(0.25, -10.13)$ اس ہے۔ دو درجی تقابل کا گراف بنانے کے لیے ہم کچھ مزید

نقاط لیتے ہیں۔

x	-2.5	-1	1	2
y	5	-7	-9	-4

یاد رکھیے!

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا حل بذریعہ گراف معلوم کرنے کے لیے ہم سب سے پہلے دو درجی تقابل $y = ax^2 + bx + c$ کا گراف بناتے ہیں۔

نقاط اور اس کو ملانے سے اوپر دیا گیا گراف بنتا ہے۔ دیے گئے دو درجی تقابل $y = 2x^2 - x - 10 = 0$ کا گراف اوپر کی جانب کھلتا ہے اور یہ $-x$ محور کو $(-2, 0)$ اور $(2.5, 0)$ پر قطع کرتا ہے۔

(ii) گراف $-x$ محور کو $x = 2.5$ اور $x = -2$ پر قطع کرتا ہے۔ اس لیے، 2.5 اور -2 دو درجی مساوات $2x^2 - x - 10 = 0$ کے روٹس ہیں۔ لہذا $\{2.5, -2\}$ حل سیٹ ہے۔

حل مشق 2.1

1- درج ذیل دو درجی مساواتوں کو معیاری شکل میں لکھیے:

(i) $3x - 1 = 2x^2$

$3x - 1 = 2x^2$

$-2x^2 + 3x - 1 = 0$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

حل:

(ii) $2x(x + 1) = 4(2x + 3)$

$2x(x + 1) = 4(2x + 3)$

$2x^2 + 2x = 8x + 12$

$2x^2 + 2x - 8x - 12 = 0$

$2x^2 - 6x - 12 = 0$

$2(x^2 - 3x - 6) = 0$

$x^2 - 3x - 6 = 0$

حل:

(iii) $2x^2 - 4x = 4x + 7$

$2x^2 - 4x = 4x + 7$

$2x^2 - 4x - 4x - 7 = 0$

$2x^2 - 8x - 7 = 0$

حل:

(iv) $4(3x - 2) = 9x^2$

$4(3x - 2) = 9x^2$

$12x - 8 = 9x^2$

$-9x^2 + 12x - 8 = 0$

$9x^2 - 12x + 8 = 0$

حل:

$$(v) \quad 2x + \frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$2x + \frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{x}$$

دونوں اطراف کو x سے ضرب دینے سے

$$x(2x) + x\left(\frac{1}{x}\right) = x(5) - x\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$2x^2 + 1 = 5x - 1$$

$$2x^2 - 5x + 1 + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(vi) \quad \frac{6x+6}{20-x} = \frac{1}{x}, x \neq 0, 20$$

$$\frac{6x+6}{20-x} = \frac{1}{x}$$

دونوں اطراف کو $x(20-x)$ سے ضرب دینے سے

$$x(20-x) \frac{(6x+6)}{20-x} = x(20-x) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x(6x+6) = 20-x$$

$$6x^2 + 6x = 20-x$$

$$6x^2 + 6x + x - 20 = 0$$

$$6x^2 + 7x - 20 = 0$$

2- درج ذیل دو درجی مساواتوں کو تجزی کے طریقہ سے حل کیجیے:

$$(i) \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$$

$$x(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x-3=0 \quad \text{یا} \quad x+2=0$$

$$x=3 \quad \text{یا} \quad x=-2$$

$$\{3, -2\} = \text{حل سیٹ}$$

$$(ii) \quad x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

$$x^2 + 7x - 4x - 28 = 0$$

$$x(x+7) - 4(x+7) = 0$$

$$(x+7)(x-4) = 0$$

$$x+7=0 \quad \text{یا} \quad x-4=0$$

$$x=-7 \quad \text{یا} \quad x=4$$

$$\{-7, 4\} = \text{حل سیٹ}$$

$$(iii) \quad 6x^2 + 13x - 5 = 0$$

$$6x^2 + 13x - 5 = 0$$

$$6x^2 + 15x - 2x - 5 = 0$$

$$3x(2x+5) - 1(2x+5) = 0$$

$$(2x+5)(3x-1) = 0$$

$$2x+5=0, \quad 3x-1=0$$

$$2x=-5, \quad 3x=1$$

$$x = \frac{-5}{2}, \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{-5}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(iv) \quad x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}$$

حل:

$$x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}$$

حل:

دونوں اطراف 2 سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوا

$$2(x^2) - 2\left(\frac{3}{2}x\right) = 2\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$2x^2 - 6x + 3x - 9 = 0$$

$$2x(x-3) + 3(x-3) = 0$$

$$(x-3)(2x+3) = 0$$

$$x-3=0 \quad \text{یا} \quad 2x+3=0$$

$$x=3 \quad \text{یا} \quad 2x=-3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ 3, \frac{-3}{2} \right\}$$

$$(v) \quad \frac{3x-8}{x-2} = \frac{5x-2}{x+5}, x \neq 2, -5$$

$$\frac{3x-8}{x-2} = \frac{5x-2}{x+5}$$

حل:

ضرب چلیپائی کے ذریعے سے

$$(x+5)(3x-8) = (x-2)(5x-2)$$

$$x(3x-8) + 5(3x-8) = x(5x-2) - 2(5x-2)$$

$$3x^2 - 8x + 15x - 40 = 5x^2 - 2x - 10x + 4$$

$$3x^2 + 7x - 40 = 5x^2 - 12x + 4$$

$$3x^2 - 5x^2 + 7x + 12x - 40 - 4 = 0$$

$$-2x^2 + 19x - 44 = 0$$

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 19x + 44 &= 0 \\
 2x^2 - 11x - 8x + 44 &= 0 \\
 x(2x - 11) - 4(2x - 11) &= 0 \\
 (2x - 11)(x - 4) &= 0 \\
 2x - 11 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 4 &= 0 \\
 2x = 11 \quad \text{یا} \quad x &= 4 \\
 x = \frac{11}{2} \quad \text{یا} \quad x &= 4
 \end{aligned}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{11}{2}, 4 \right\}$$

$$(vi) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{35}, x \neq 1, -3$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{x+3-(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{x+3-x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{35}$$

ضرب چلیپائی کے ذریعے سے

$$35 \times 4 = (x-1)(x+3)$$

$$140 = x(x+3) - 1(x+3)$$

$$140 = x^2 + 3x - x - 3$$

$$140 = x^2 + 2x - 3$$

$$-x^2 - 2x + 140 + 3 = 0$$

$$-x^2 - 2x + 143 = 0$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$x^2 + 13x - 11x - 143 = 0$$

$$x(x+13) - 11(x+13) = 0$$

$$(x+13)(x-11) = 0$$

$$x+13=0 \quad \text{یا} \quad x-11=0$$

$$x=-13 \quad \text{یا} \quad x=11$$

$$\text{حل سیٹ} = \{-13, 11\}$$

3- درج ذیل دو درجی مساواتوں کو تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

$$(i) 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

حل:

مساوات کے دونوں اطراف $2(x^2)$ کے عددی سر) سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x سے ضرب دے گا۔

مربع یعنی $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ کو جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -1 + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = -1 + \frac{25}{16}$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{-16 + 25}{16}$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

مساوات کے دونوں طرف جذر مربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x + \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x + \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4}$$

$$x + \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{یا} \quad x + \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{3-5}{4} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-3-5}{4}$$

$$x = -\frac{2}{4} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{8}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x = -2$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, -2 \right\} = \text{حل سیٹ}$$

(ii) $x^2 + x = 42$

$x^2 + x = 42$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کا نصف کا مربع

$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 42 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 42 + \frac{1}{4}$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{168+1}{4}$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$

مساوات کے دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}}$

$x + \frac{1}{2} = \pm \frac{13}{2}$

$x + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ یا $x + \frac{1}{2} = -\frac{13}{2}$

$x = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}$ یا $x = -\frac{13}{2} - \frac{1}{2}$

$x = \frac{13-1}{2}$ یا $x = \frac{-13-1}{2}$

$x = \frac{12}{2}$ یا $x = \frac{-14}{2}$

$x = 6$ یا $x = -7$

حل سیٹ $\{6, -7\}$

(iii) $12x^2 + 7x = 12$

$12x^2 + 7x = 12$

مساوات کے دونوں طرف 12 (x^2 کے عددی سر) سے تقسیم

$\frac{12}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = \frac{12}{12}$

$x^2 + \frac{7}{12}x = 1$

حل:

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کے نصف کا

مربع یعنی $\left(\frac{7}{24}\right)^2$ جمع کرتے ہیں۔

$x^2 + \frac{7}{12}x + \left(\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2$

$\left(x + \frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576}$

$\left(x + \frac{7}{24}\right)^2 = \frac{576+49}{576}$

$\left(x + \frac{7}{24}\right)^2 = \frac{625}{576}$

مساوات کے دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$\sqrt{\left(x + \frac{7}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{576}}$

$x + \frac{7}{24} = \pm \frac{25}{24}$

$x = \frac{-7}{24} + \frac{25}{24}$ یا $x = \frac{-7}{24} - \frac{25}{24}$

$x = \frac{-7+25}{24}$ یا $x = \frac{-7-25}{24}$

$x = \frac{18}{24}$ یا $x = \frac{-32}{24}$

$x = \frac{3}{4}$ یا $x = \frac{-4}{3}$

حل سیٹ $= \left\{\frac{3}{4}, \frac{-4}{3}\right\}$

(iv) $\frac{x+3}{2x-7} = \frac{2x-1}{x-3}$, $x \neq \frac{7}{2}, 3$

$\frac{x+3}{2x-7} = \frac{2x-1}{x-3}$

$(x+3)(x-3) = (2x-1)(2x-7)$

ضرب چلیپائی کے ذریعے

$x^2 - 3x + 3x - 9 = 4x^2 - 14x - 2x + 7$

$x^2 - 9 = 4x^2 - 16x + 7$

$x^2 - 4x^2 + 16x - 9 - 7 = 0$

حل:

آنے سے

حل:

$$-3x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$

مساوات کے دونوں طرف 3 (x² کے عددی سرے سے تقسیم کرنے سے)

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{16x}{3} + \frac{16}{3} = \frac{0}{3}$$

$$x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{16}{3}x = -\frac{16}{3}$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کا عددی سرے کے نصف کا

مربع یعنی $\left(\frac{8}{3}\right)^2$ جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - \frac{16}{3}x + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{16}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{-16}{3} + \frac{64}{9}$$

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{-48 + 64}{9}$$

مساوات کے دونوں طرف جذر مربع لینے سے

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$x - \frac{8}{3} = \pm \frac{4}{3}$$

$$x - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

$$x = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{12}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = 4$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{4, \frac{4}{3}\right\}$$

$$(v) \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3-x} = \frac{6}{35}, x \neq -1, 3$$

$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{3-x} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{(3-x) - (1+x)}{(1+x)(3-x)} = \frac{6}{35}$$

$$\frac{3-x-1-x}{3-x+3x-x^2} = \frac{6}{35}$$

$$35(2-2x) = 6(-x^2+2x+3)$$

ضرب چلیپائی کے ذریعے

$$70 - 70x = -6x^2 + 12x + 18$$

$$6x^2 - 70x - 12x + 70 - 18 = 0$$

$$6x^2 - 82x + 52 = 0$$

$$2(3x^2 - 41x + 26) = 0$$

$$3x^2 - 41x + 26 = 0$$

مساوات کے دونوں اطراف 3 (x² کے عددی سرے سے تقسیم

کرنے سے

$$\frac{3}{3}x^2 - \frac{41}{3}x + \frac{26}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{41}{3}x + \frac{26}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{41}{3}x = -\frac{26}{3}$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سرے کے نصف کا

مربع یعنی $\left(\frac{41}{6}\right)^2$ کو جمع کرتے ہیں

$$x^2 - \frac{41}{3}x + \left(\frac{41}{6}\right)^2 = -\frac{26}{3} + \left(\frac{41}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{41}{6}\right)^2 = \frac{26}{3} + \frac{1681}{36}$$

$$\left(x - \frac{41}{6}\right)^2 = \frac{-342 + 1681}{36}$$

$$\left(x - \frac{41}{6}\right)^2 = \frac{1339}{36}$$

مساوات کے دونوں طرف کا جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{41}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1369}{36}}$$

$$x - \frac{41}{6} = \pm \frac{37}{6}$$

$$x - \frac{41}{6} = \frac{37}{6} \quad \text{یا} \quad x - \frac{41}{6} = -\frac{37}{6}$$

$$x = \frac{37}{6} + \frac{41}{6} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{37}{6} + \frac{41}{6}$$

$$x = \frac{78}{6} \quad \text{یا} \quad x = \frac{4}{6}$$

$$x = 13 \quad \text{یا} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{13, \frac{2}{3}\right\}$$

$$(vi) \frac{3x-1}{4x+7} = 1 - \frac{6}{x+7}, x \neq \frac{-7}{4}, -7$$

$$\frac{3x-1}{4x+7} = 1 - \frac{6}{x+7}$$

$$\frac{3x-1}{4x+7} = \frac{x+7-6}{x+7}$$

$$\frac{3x-1}{4x+7} = \frac{x+1}{x+7}$$

$$(3x-1)(x+7) = (x+1)(4x+7)$$

ضرب چلیپائی کے ذریعے سے

$$3x^2 + 21x - x - 7 = 4x^2 + 7x + 4x + 7$$

$$3x^2 + 20x - 7 = 4x^2 + 11x + 7$$

$$3x^2 - 4x^2 + 20x - 11x = 7 + 7$$

$$-x^2 + 9x = 14$$

$$x^2 - 9x = -14$$

$$x^2 - 9x = -14$$

ہم مساوات کے دونوں اطراف x کے عددی سر کے نصف کا

مربع یعنی $\left(\frac{9}{2}\right)^2$ کا جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -14 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = -14 + \frac{81}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{-56 + 81}{4}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

دونوں اطراف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x - \frac{9}{2} = \pm \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{9}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad x - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{14}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{4}{2}$$

$$x = 7 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

$$\text{حل سیٹ} = \{7, 2\}$$

4- درج ذیل مساواتوں کو دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

$$(i) 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad (\text{دیا گیا کہ}) \quad \text{حل:}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات اور معیاری شکل کا موازنہ کرنے سے

$$a = 2, b = -5, c = 3$$

a اور b کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{5+1}{4}, x = \frac{5-1}{4}$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, x = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{3}{2}, 1 \right\}$$

$$(ii) 2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$2x^2 - 7x - 15 = 0 \quad (\text{دیا گیا کہ}) \quad \text{حل:}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات اور معیاری شکل کا موازنہ کرنے سے

$$a = 2, b = -7, c = -15$$

a اور b، c کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{7+13}{4}, x = \frac{7-13}{4}$$

$$x = \frac{20}{4} = 5, x = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ 5, \frac{-3}{2} \right\}$$

$$(iii) 2x^2 + 7x = 15$$

$$2x^2 + 7x = 15 \quad (\text{دیا گیا ہے کہ}) \quad \text{حل:}$$

$$2x^2 + 7x - 15 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات اور معیاری شکل کا موازنہ کرنے سے

$$a = 2, b = 7, c = -15$$

www.ilmkidunya.com کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{-7+13}{4}, x = \frac{-7-13}{4}$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, x = \frac{-20}{4} = -5$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{3}{2}, -5 \right\}$$

$$(iv) x^2 + 11 = 7x$$

$$x^2 + 11 = 7x$$

$$x^2 - 7x + 11 = 0 \quad (\text{دیا گیا ہے کہ})$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات اور معیاری شکل کا موازنہ کرنے سے

$$a = 1, b = -7, c = 11$$

a اور b، c کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(11)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

$$(v) \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-2}{x-3} = 6\frac{1}{3}, x \neq 4, 3$$

$$\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-2}{x-3} = 6\frac{1}{3}$$

$$\frac{(x-3)(x+4) + (x-4)(x-2)}{(x-4)(x-3)} = \frac{19}{3}$$

$$\frac{x^2 + 4x - 3x - 12 + x^2 - 2x - 4x + 8}{x^2 - 3x - 4x + 12} = \frac{19}{3}$$

$$\frac{x^2 + x^2 + 4x - 3x - 2x - 4x - 12 + 8}{x^2 - 7x + 12} = \frac{19}{3}$$

$$\frac{2x^2 - 5x - 4}{x^2 - 7x + 12} = \frac{19}{3}$$

$$3(2x^2 - 5x - 4) = 19(x^2 - 7x + 12)$$

$$6x^2 - 15x - 12 = 19x^2 - 133x + 228$$

$$6x^2 - 19x^2 - 15x + 133x - 12 - 228 = 0$$

$$-13x^2 + 118x - 240 = 0$$

$$13x^2 - 118x + 240 = 0 \text{ (دیا گیا ہے)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (معیاری شکل)}$$

$$a = 13, b = -118, c = 240$$

$$a, b, c \text{ کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-118) \pm \sqrt{(-118)^2 - 4(13)(240)}}{2(13)}$$

$$x = \frac{118 \pm \sqrt{13924 - 12480}}{26}$$

$$x = \frac{118 \pm \sqrt{1444}}{26}$$

$$x = \frac{118 \pm 38}{26}$$

$$x = \frac{118 + 38}{26}, x = \frac{118 - 38}{26}$$

$$x = \frac{156}{26} = 6, x = \frac{80}{26} = \frac{40}{13}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ 6, \frac{40}{13} \right\}$$

$$(vi) \frac{3x-3}{x+1} = \frac{2x-1}{x-1}, x \neq -1, 1$$

$$(x-1)(3x-3) = (x+1)(2x-1)$$

$$3x^2 - 3x - 3x + 3 = 2x^2 - x + 2x - 1$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 2x^2 + x - 1$$

$$3x^2 - 2x^2 - 6x - x + 3 + 1 = 0$$

$$x^2 - 7x + 4 = 0 \text{ (دیا گیا ہے)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (معیاری شکل)}$$

$$a = 1, b = -7, c = 4$$

$$a, b, c \text{ کی قیمتیں دو درجی کلیہ میں درج کرنے سے}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2} \right\}$$

5- درج ذیل دو درجی مساواتوں کو گراف کے طریقہ سے

حل کیجیے۔

$$(i) x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$y = x^2 - 3x - 18$$

$$y = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18$$

$$y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 18$$

$$y = (x - 1.5)^2 - 2.25 - 18$$

$$y = (x - 1.5)^2 - 20.25$$

$$y = a(x - h)^2 + k$$

[دو درجی تفاعل کی راسی شکل]

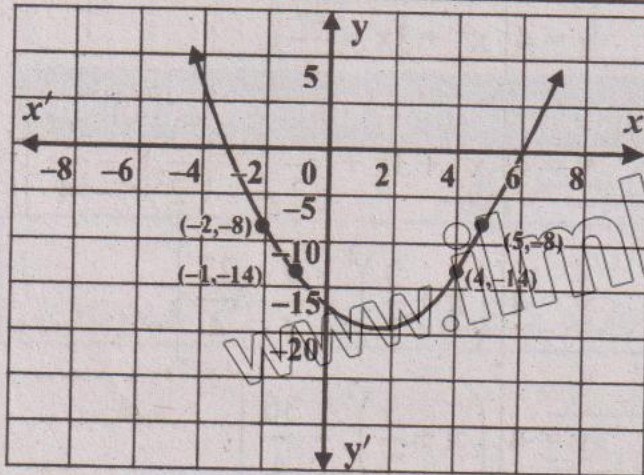
اس کا موازنہ دو درجی تفاعل کی راسی شکل سے کرنے سے

لہذا راس (1.5, -20.25) ہے۔

دو درجی تفاعل کا گراف بنانے کے لیے ہم کچھ مزید نقاط لیتے ہیں۔

$$y = x^2 - 3x - 18$$

x	y = x ² - 3x - 18	(x, y)
5	y = (5) ² - 3(5) - 18 = 25 - 15 - 18 = -8	(5, -8)
4	y = (4) ² - 3(4) - 18 = 16 - 12 - 18 = -14	(4, -14)
-2	y = (-2) ² - 3(-2) - 18 = 4 + 6 - 18 = -8	(-2, -8)
-1	y = (-1) ² - 3(-1) - 18 = 1 + 3 - 18 = -14	(-1, -14)



نقاط اور راس کو ملانے سے اوپر دیا گیا گراف بنتا ہے۔ دیے گئے

دو درجی تفاعل $y = x^2 - 3x - 18$ کا گراف اوپر کی طرف کھلتا ہے

اور x-محور کو (-3, 0) اور (6, 0) پر قطع کرتا ہے۔

گراف x-محور کو $x = -3$ اور $x = 6$ پر قطع کرتا ہے۔ اس

لیے 6 اور 3- دو درجی مساوات $x^2 - 3x - 18 = 0$ کے رولس ہیں۔

پس حل سیٹ {-3, 6} ہے۔

(ii) $x^2 - 5x - 14 = 0$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$y = x^2 - 5x - 14$$

$$y = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 14$$

$$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 14$$

حل:

(iii) $2x^2 + 13x + 6 = 0$

$$2x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$y = 2x^2 + 13x + 6$$

حل:

فرض کیا

$$y = \frac{x^2}{2} - 6.25 - 14$$

$$y = (x - 2.5)^2 - 20.25$$

$$y = (x - h)^2 + k$$

اس کا موازنہ دو درجی تفاعل کی راسی شکل سے کرنے سے

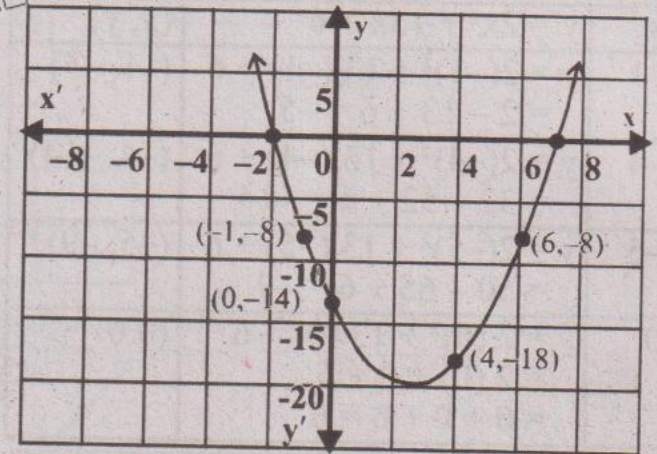
(دو درجی تفاعل کی راسی شکل)

لہذا راس (2.5, -20.25) ہے۔

دو درجی تفاعل کا گراف بنانے کے لیے ہم کچھ مزید نقاط لیتے ہیں۔

$$y = x^2 - 5x - 14$$

x	y = x ² - 5x - 14	(x, y)
6	y = (6) ² - 5(6) - 14 = 36 - 30 - 14 = -8	(6, -8)
4	y = (4) ² - 5(4) - 14 = 16 - 20 - 14 = -18	(4, -18)
-1	y = (-1) ² - 5(-1) - 14 = 1 + 5 - 14 = -8	(-1, -8)
0	y = (0) ² - 5(0) - 14 = 0 - 0 - 14 = -14	(0, -14)



نقاط اور راس کو ملانے سے اوپر دیا گیا گراف بنتا ہے دیے گئے

دو درجی تفاعل $y = x^2 - 5x - 14 = 0$ کا گراف اوپر کی جانب بنتا

ہے اور یہ x-محور پر (7, 0) اور (-2, 0) پر قطع کرتا ہے۔

گراف x-محور کو $x = -2$ اور $x = 7$ پر قطع کرتا ہے۔ اس لیے

7 اور 2- دو درجی مساوات $x^2 - 5x - 14 = 0$ کے رولس ہیں۔

لہذا {-2, 7} حل سیٹ ہے۔

$$y = 2 \left[x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{6}{2} \right]$$

$$y = 2 \left[x^2 + \frac{13}{2}x + 3 \right]$$

$$y = 2 \left[x^2 + \frac{13}{2}x + \left(\frac{13}{4} \right)^2 - \left(\frac{13}{4} \right)^2 + 3 \right]$$

$$y = 2 \left[\left(x + \frac{13}{4} \right)^2 - \frac{169}{16} + 3 \right]$$

$$y = 2 \left[(x + 3.25)^2 - 10.57 + 3 \right]$$

$$y = 2 \left[(x + 3.25)^2 - 7.57 \right]$$

$$y = 2 (x + 3.25)^2 - 15.14$$

$$y = a (x - h)^2 + k$$

دورجی تقاعلی کی راسی شکل

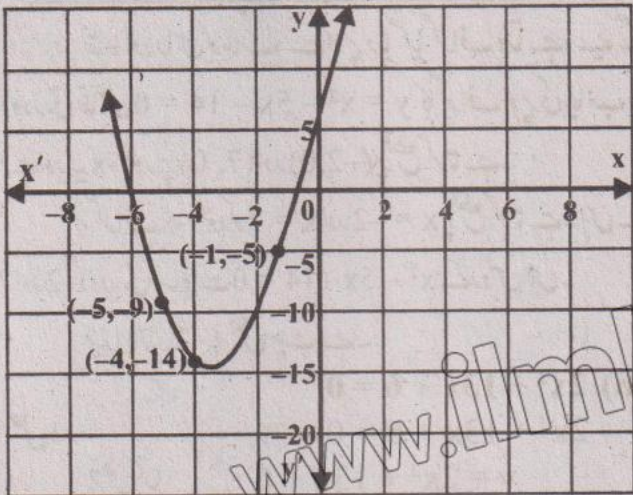
اس کا موازنہ دورجی تقاعلی کی راسی شکل سے کرنے سے

لہذا راس $(-3.25, -15.14)$ ہے۔

دورجی تقاعلی کا گراف بنانے کے لیے ہم کچھ مزید نقاط لیتے ہیں۔

تقاعلی کے لیے جدول کی قیمتیں $y = 2x^2 + 13x + 6$

x	$y = 2x^2 + 13x + 6$	(x, y)
-1	$y = 2(-1)^2 + 13(-1) + 6$ $= 2 - 13 + 6 = -5$	(-1, -5)
-4	$y = 2(-4)^2 + 13(-4) + 6$ $= 32 - 52 + 6 = -14$	(-4, -14)
-5	$y = 2(-5)^2 + 13(-5) + 6$ $= 50 - 65 + 6 = -9$	(-5, -9)
0	$y = 2(0)^2 + 13(0) + 6$ $= 2(0) + 0 + 6$ $= 0 + 0 + 6 = 6$	(0, 6)



نقاط اور اس کو ملائے ہے اور پوچھا گیا گراف بننا ہے۔ دیے گئے دورجی تقاعلی $y = 2x^2 + 13x + 6$ کا گراف اوپر کی جانب کھلا ہے اور یہ x-محور کو $(-6, 0)$ اور $(-0.5, 0)$ پر قطع کرتا ہے۔ گراف x-محور کو $x = -6$ اور $x = -0.5$ پر قطع کرتا ہے اس لیے -6 اور -0.5 دورجی مساوات $2x^2 + 13x + 6 = 0$ کے روٹس ہیں۔

لہذا $\{-6, -0.5\}$ حل سیٹ ہے۔

(iv) $4x^2 + 12x - 27 = 0$

$$4x^2 + 12x - 27 = 0$$

$$y = 4x^2 + 12x - 27$$

حل:

فرض کیا

$$y = 4 \left[x^2 + \frac{12}{4}x - \frac{27}{4} \right]$$

$$y = 4 \left[x^2 + 3x - \frac{27}{4} \right]$$

$$y = 4 \left[x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{27}{4} \right]$$

$$y = 4 \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{27}{4} \right]$$

$$y = 4 \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{36}{4} \right]$$

$$y = 4 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{36}{4}$$

$$y = 4 (x + 1.5)^2 - 36$$

$$y = a (x - h)^2 - 36$$

دورجی تقاعلی کی راسی شکل

لہذا راس $(-1.5, -36)$ ہے

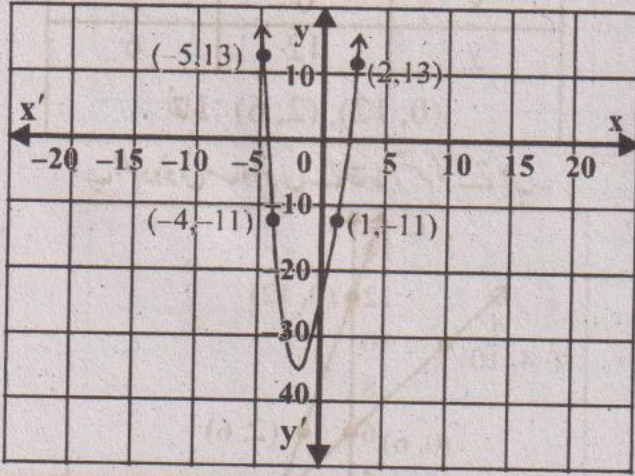
اس کا موازنہ دورجی تقاعلی کی راسی شکل سے کرنے سے

دورجی تقاعلی کا گراف بنانے کے لیے ہم کچھ مزید نقاط لیتے ہیں۔

تقاعلی $y = 4x^2 + 12x - 27$ کے لیے جدول میں قیمتیں

x	$y = 4x^2 + 12x - 27$	(x, y)
1	$y = 4(1)^2 + 12(1) - 27$ $= 4 + 12 - 27 = -11$	(1, -11)

2	$y = 4(2)^2 + 12(2) - 27$ $= 16 + 24 - 27 = 13$	(2, 13)
-4	$y = 4(-4)^2 + 12(-4) - 27$ $= 64 - 48 - 27 = -11$	(-4, -11)
-5	$y = 4(-5)^2 + 12(-5) - 27$ $= 100 - 60 - 27 = 13$	(-5, 13)



نقاط اور اس کو ملائے سے اوپر دیا گراف بننا ہے دیے گئے دو
درجی تعامل $y = 4x^2 + 12x - 27$ کا گراف اوپر کی جانب ملتا ہے
اور یہ x -محور کو (1.5, 0) اور (-4.5, 0) پر قطع کرتا ہے۔
گراف x -محور کو 1.5 اور $x = -4.5$ پر قطع کرتا ہے۔
اس لیے 1.5 اور -4.5 دو درجی مساوات $4x^2 + 12x - 27 = 0$
کے روٹس ہیں۔

لہذا $\{-4.5, 1.5\}$ حل سیٹ ہے۔

2.2 گراف کے طریقہ سے نقطہ/نقاط تقاطع معلوم کرنا (Finding Intersection Point(s) Graphically)

مثال 6: $y = 2x + 4$ کا محدوداتی محوروں کے ساتھ تقاطع کے نقاط بذریعہ گراف معلوم کیجیے۔

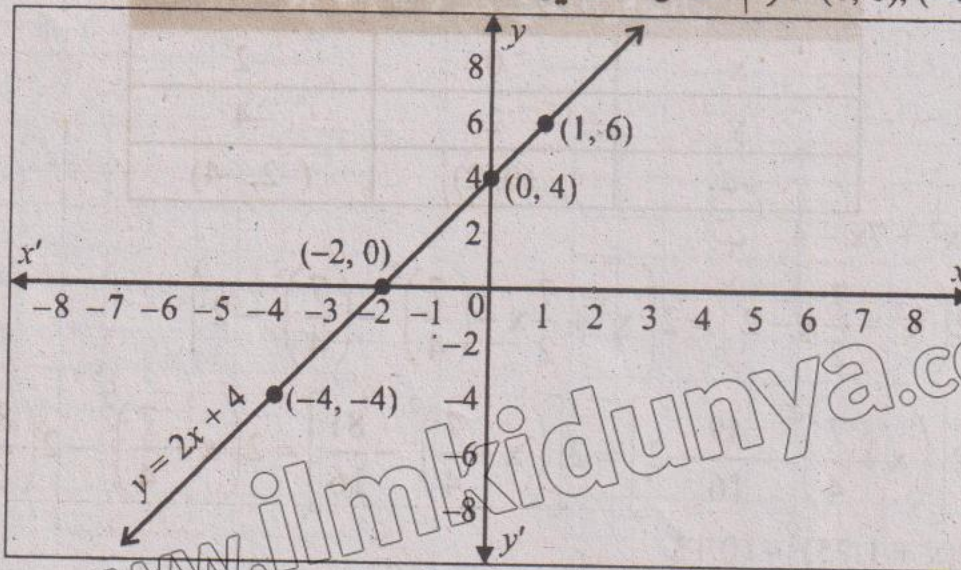
حل: $y = 2x + 4$ ایک خط کی مساوات ہے اب ہم،
 $y = 2x + 4$ کا گراف بناتے ہیں۔

یاور کیجیے! خط مستقیم کا گراف بنانے کے لیے یہ مندرجہ ذیل ہے کہ کم از کم دو مختلف نقاط ہوں۔

قدروں کا جدول

x	1	-4
y	6	-4

ہم نقاط (1, 6)، (-4, -4) کو مرتب کر کے ان کو ملاتے ہیں۔



x -محور پر نقطہ تقاطع (-2, 0) اور y -محور پر نقطہ تقاطع (0, 4) ہے۔

دو یک درجی تقاضوں کا نقطہ تقاطع بذریعہ گراف معلوم کرنا

(Finding Point of Intersection of Two Linear Functions Graphically)

مثال 7: اگر $x + y = 6$ اور $3x + y = 12$ ہوں تو ان کا نقطہ تقاطع بذریعہ گراف معلوم کیجیے۔

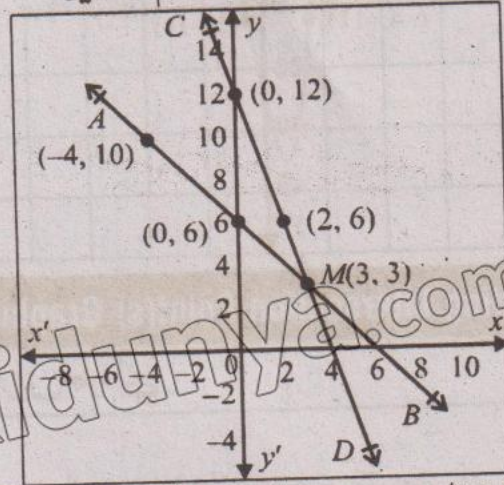
حل: $x + y = 6$ اور $3x + y = 12$ دو یک درجی مساواتیں ہیں۔ اب ہم ان دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

x + y = 6 کے لیے قدروں کا جدول		
x	0	-4
y	6	10
نقاط: (0, 6), (-4, 10)		

3x + y = 12 کے لیے قدروں کا جدول		
x	0	2
y	12	6
نقاط: (0, 12), (2, 6)		

اب ہم دونوں مساواتوں کے نقاط مرتب کرتے ہیں۔

$\overline{AB}$ ، $x + y = 6$ کا گراف ہے۔
 $\overline{CD}$ ، $3x + y = 12$ کا گراف ہے۔
 پس، $M(3, 3)$ نقطہ تقاطع ہے۔



(Finding Points of Intersection of a Linear Function and a Quadratic Function Graphically)

مثال 8: اگر $y = 2 + 3x$ اور $y = 2x^2 + 7x - 4$ ہوں تو تقاطع کے نقاط بذریعہ گراف معلوم کیجیے۔

حل: ہم دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

y = 2 + 3x کے لیے قدروں کا جدول		
x	0	-2
y	2	-4
نقاط	(0, 2)	(-2, -4)

اب $y = 2x^2 + 7x - 4$

$$y = 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x - 2\right) = 2\left(x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 2\right)$$

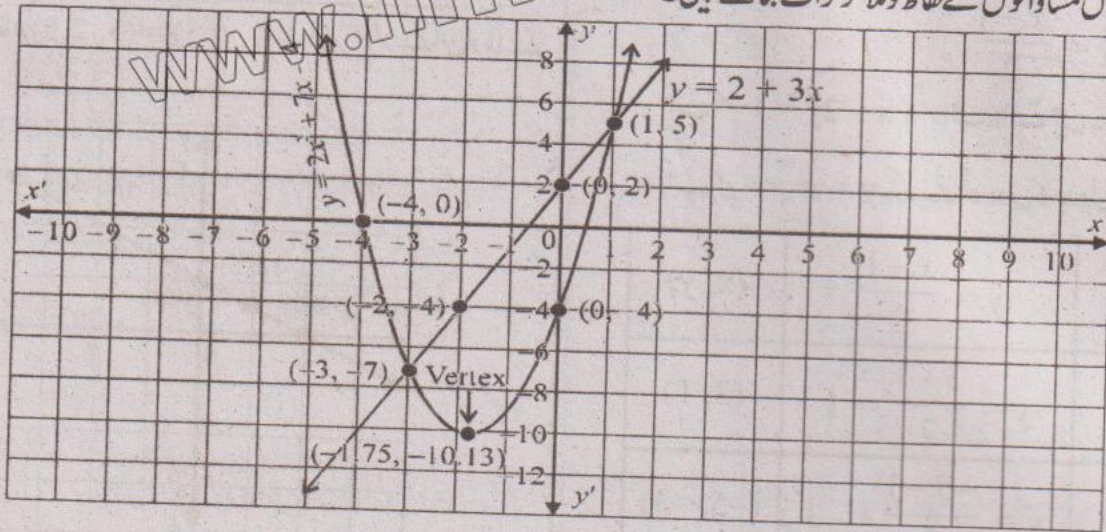
$$y = 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} - 2\right] = 2\left[\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right] = 2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{81}{16}\right)$$

$$y = 2(x + 1.75)^2 - 10.13$$

پس $(-1.75, -10.13)$ اس ہے۔

یہ دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔

x	-4	-3	0	1
y	0	7	-4	5



تقاطع کے نقاط (1, 5) اور (-3, -7) ہیں۔

حل مشق 2.2

1- درج ذیل ایک درجی مساواتوں اور محداتی محوروں کے تقاطع کے نقاط بذریعہ گراف معلوم کیجیے۔

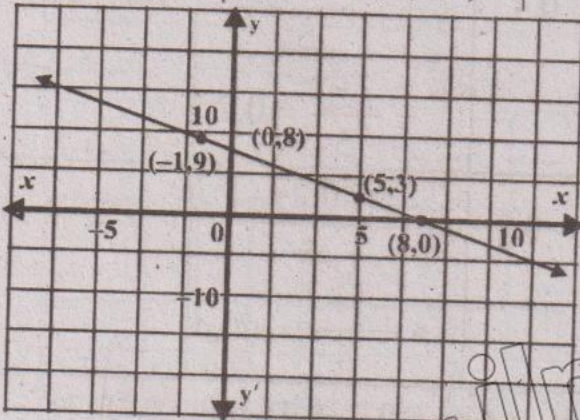
(i) $x + y = 8$

حل: ایک خط کی مساوات ہے $x + y = 8$
 $y = 8 - x$

اب ہم $x + y = 8$ کا گراف بناتے ہیں۔
 $y = 8 - x$ کے لیے قدروں کا جدول

x	y = 8 - x	(x, y)
5	y = 8 - 5 = 3	(5, 3)
-1	y = 8 - (-1) = 9	(-1, 9)

ہم نقاط (5, 3) اور (-1, 9) کو ملا کر بناتے ہیں۔



x-محور پر نقطہ تقاطع (8, 0) اور y-محور پر نقطہ تقاطع (0, 8) قطع کرتا ہے۔

(ii) $x - y = 1$
 $x - y = 1$

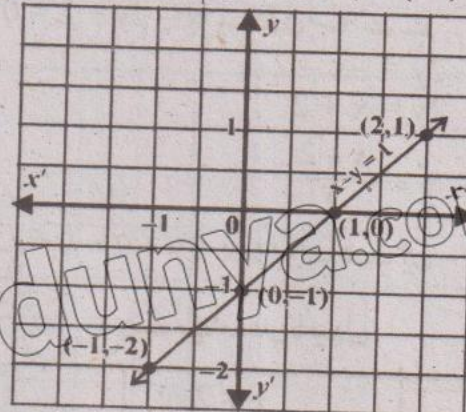
حل: ایک خط کی مساوات ہے۔
 $y = x - 1$ یا

اب ہم $y = x - 1$ کا گراف بناتے ہیں۔

$y = x - 1$ کے لیے قدروں کا جدول

x	y = x - 1	(x, y)
2	y = 2 - 1 = 1	(2, 1)
-1	y = -1 - 1 = -2	(-1, -2)

ہم نقاط (2, 1) اور (-1, -2) کو ملا کر بناتے ہیں۔



x-محور پر نقطہ تقاطع (1, 0) اور y-محور پر نقطہ تقاطع (0, -1) ہے۔

(iii) $x - 2y = 1$

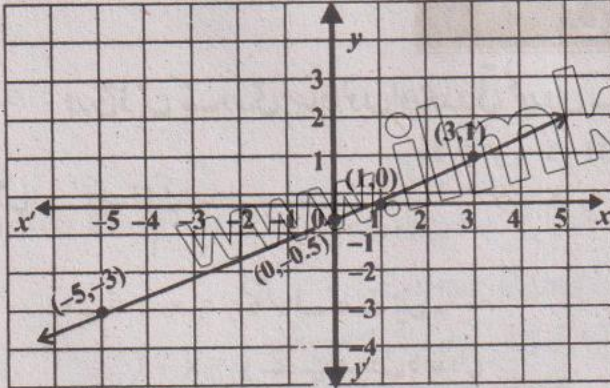
حل: $x - 2y = 1$ ایک خط کی مساوات ہے
 $-2y = -x + 1$
 $2y = x - 1$
 $y = \frac{x-1}{2}$

اب ہم $x - 2y = 1$ کا گراف بناتے ہیں۔

اب ہم $y = \frac{x-1}{2}$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = \frac{x-1}{2}$	(x, y)
3	$y = \frac{3-1}{2} = 1$	(3, 1)
-5	$y = \frac{-5-1}{2} = -3$	(-5, -3)

ہم نقاط (3, 1) اور (-5, -3) کو مرتب کر کے ان کو ملاتے ہیں



$-x$ محور پر نقطہ تقاطع (1, 0) اور $-y$ محور پر نقطہ تقاطع (0, -0.5) ہے۔

(iv) $x - 2y + 2 = 0$

حل: $x - 2y + 2 = 0$ ایک خط کی مساوات ہے
 $-2y = -x - 2$
 $2y = x + 2$
 $y = \frac{x+2}{2}$

اب ہم $x - 2y + 2 = 0$ کا گراف بناتے ہیں

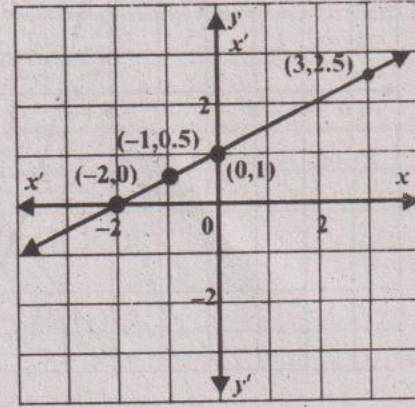
یہ $y = \frac{x+2}{2}$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = \frac{x+2}{2}$	(x, y)
---	---------------------	--------

3	$y = \frac{3+2}{2} = 2.5$	(3, 2.5)
-1	$y = \frac{-1+2}{2} = 0.5$	(-1, 0.5)

ہم نقاط (3, 2.5) اور (-1, 0.5) کو مرتب کر کے ان کو ملاتے ہیں

ہیں



$-x$ محور پر نقطہ تقاطع (-2, 0) اور $-y$ پر نقطہ تقاطع (0, 1) ہے۔

(v) $5x - 5y = 1$

حل: $5x - 5y = 1$ ایک خط کی مساوات ہے
 $-5y = -5x + 1$
 $5y = 5x - 1$
 $y = \frac{5x-1}{5}$

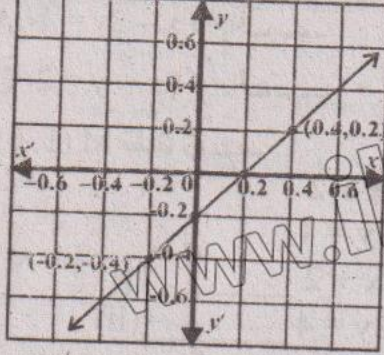
اب ہم $5x - 5y = 1$ کا گراف بناتے ہیں۔

یہ $y = \frac{5x-1}{5}$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = \frac{5x-1}{5}$	(x, y)
0.4	$y = \frac{5(0.4)-1}{5} = \frac{2-1}{5} = 0.2$	(0.4, 0.2)
-0.2	$y = \frac{5(-0.2)-1}{5} = \frac{-1-1}{5} = -0.4$	(-0.2, -0.4)

ہم نقاط (0.4, 0.2) اور (-0.2, -0.4) کو مرتب کر کے ان کو

ملاتے ہیں۔



گراف ہے $x + y = 8$ AB
گراف ہے $3x - y = 4$ CD
پس نقطہ تقاطع ہے $M(3, 5)$

(ii) $x - y = 1$
 $x + 2y = 7$

$x - y = 1$ (i)

$x + 2y = 7$ (ii)

حل:

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔

ے (i)

$x - y = 1$

$-y = -x + 1$

$y = x - 1$

کے لیے قدروں کا جدول $x - y = 1$

x	y = x - 1	(x, y)
7	y = 7 - 1 = 6	(7, 6)
-5	y = -5 - 1 = -6	(-5, -6)

$x + 2y = 7$

(ii)

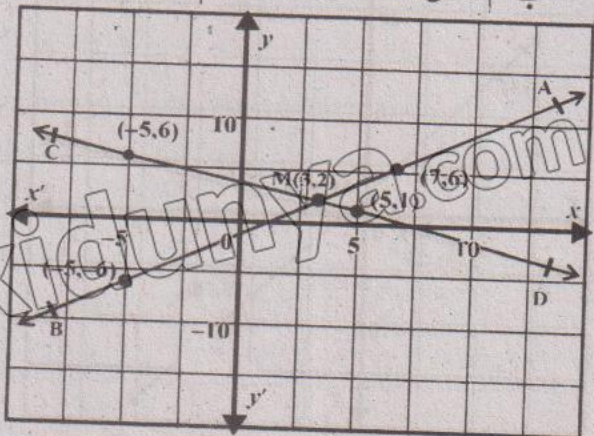
$2y = 7 - x$

$y = \frac{7 - x}{2}$

کے لیے قدروں کا جدول $x + 2y = 7$

x	y = $\frac{7 - x}{2}$	(x, y)
5	y = $\frac{7 - 5}{2} = 1$	(5, 1)
-5	y = $\frac{7 - (-5)}{2} = 6$	(-5, 6)

اب ہم دونوں مساواتوں کے نقاط مرتب کرتے ہیں۔



-x محور پر نقطہ تقاطع (0.2, 0) اور -y محور پر نقطہ تقاطع (0, -0.2) ہے۔

2- درج ذیل ایک درجی مساواتوں کے جوڑوں کو بذریعہ گراف حل کیجیے۔

(i) $x + y = 8$

$3x - y = 4$

$x + y = 8$ (i)

$3x - y = 4$ (ii)

حل:

ہم ان دو مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

ے (i)

$x + y = 8$

$y = 8 - x$

کے لیے قدروں کا جدول $x + y = 8$

x	y = 8 - x	(x, y)
5	y = 8 - 5 = 3	(5, 3)
-3	y = 8 - (-3) = 11	(-3, 11)

$3x - y = 4$

(ii)

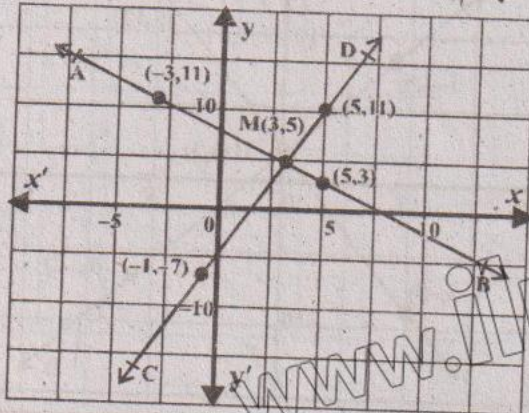
$-y = -3x + 4$

$y = 3x - 4$

کے لیے قدروں کا جدول $3x - y = 4$

x	y = 3x - 4	(x, y)
5	y = 3(5) - 4 = 11	(5, 11)
-1	y = 3(-1) - 4 = -7	(-1, -7)

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔



- کا گراف $x - y = 1$ AB

- کا گراف $x + 2y = 7$ CD

پس نقطہ تقاطع M (3, 2) ہے۔

(iii) $x - 2y = 1$

$2x + y = 2$

$x - 2y = 1$

$2x + y = 2$

اب ہم دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

سے (i)

$x - 2y = 1$

$-2y = -x + 1$

$2y = x - 1$

$y = \frac{x-1}{2}$

کے لیے قدروں کا جدول $x - 2y = 1$

x	$y = \frac{x-1}{2}$	(x, y)
5	$y = \frac{5-1}{2} = 2$	(5, 2)
-5	$y = \frac{-5-1}{2} = -3$	(-5, -3)

$2x + y = 2$

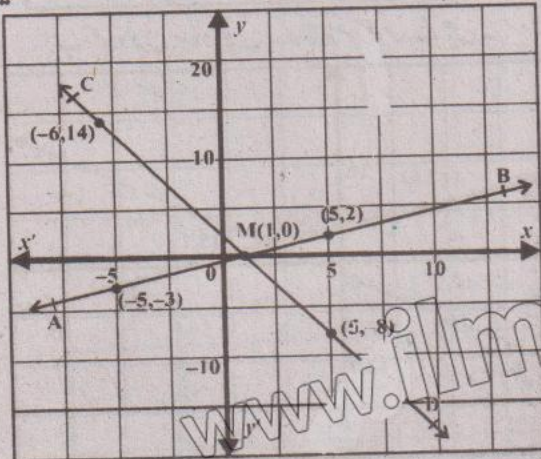
سے (ii)

$y = 2 - 2x$

کے لیے قدروں کی قیمت $-2x + y = 2$

x	$y = 2 - 2x$	(x, y)
5	$y = 2 - 2(5) = -8$	(5, -8)
-6	$y = 2 - 2(-6) = 14$	(-6, 14)

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔



- کا گراف $x - 2y = 1$ AB

- کا گراف $2x + y = 2$ CD

پس نقطہ تقاطع M (1, 0) ہے۔

(iv) $y = 2x + 2$

$3x + 2y = 4$

$y = 2x + 2$ (i)

$3x + 2y = 4$ (ii)

اب ہم دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

سے (i)

$y = 2x + 2$

کے لیے قدروں کا جدول $y = 2x + 2$

x	$y = (2x + 2)$	(x, y)
5	$y = 2(5) + 2 = 12$	(5, 12)
-5	$y = 2(-5) + 2 = -8$	(-5, -8)

$3x + 2y = 4$

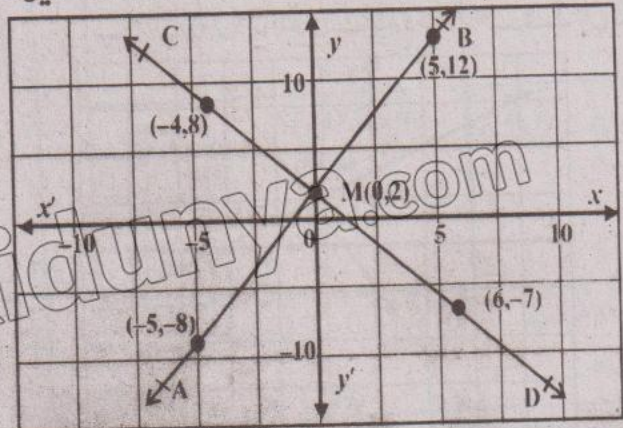
سے (ii)

$2y = -3x + 4$
 $y = \frac{-3x + 4}{2}$

کے لیے قدروں کا جدول $y = \frac{-3x + 4}{2}$

x	$y = \frac{-3x + 4}{2}$	(x, y)
6	$y = \frac{-3(6) + 4}{2} = -7$	(6, -7)
-4	$y = \frac{-3(-4) + 4}{2} = 8$	(-4, 8)

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔



AB کا گراف ہے۔ $y = 2x + 2$

CD کا گراف ہے۔ $3x + 2y = 4$

پس، نقطہ تقاطع M (0, 2) ہے۔

(v) $3y = 2x + 8$

$x + y = 1$

$3y = 2x + 8$ (i)

$x + y = 1$ (ii)

اب ہم دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

سے (i)

$3y = 2x + 8$

$y = \frac{2x + 8}{3}$

3y = 2x + 8 کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = \frac{2x + 8}{3}$	(x, y)
5	$y = \frac{2(5) + 8}{3} = 6$	(5, 6)
-10	$y = \frac{2(-10) + 8}{3} = -4$	(-10, -4)

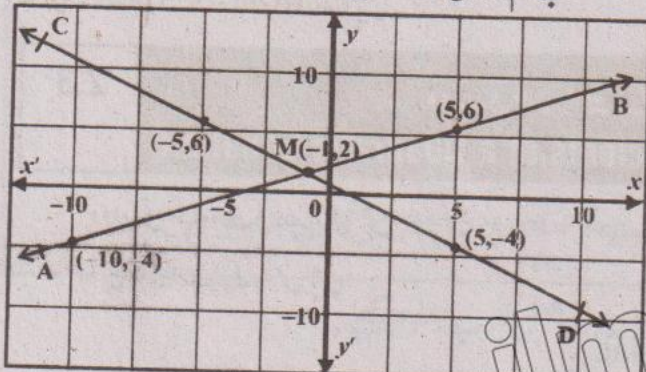
$x + y = 1$
سے (ii)

$y = 1 - x$

x + y = 1 کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = 1 - x$	(x, y)
5	$y = 1 - 5 = -4$	(5, -4)
-5	$y = 1 - (-5) = 6$	(-5, 6)

اب ہم دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔



AB کا گراف ہے۔ $3y = 2x + 8$

ED کا گراف ہے۔ $x = 10$

پس نقطہ تقاطع M(-1, 2) ہے۔

3- مساواتوں کے جوڑوں کو بذریعہ گراف حل کیجیے۔

(i) $y = 8x - 32$

$y = x^2 - 6x + 8$

$y = 8x - 32$ (i)

$y = x^2 - 6x + 8$ (ii)

حل:

اب ہم ان دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

سے (i)

$y = 8x - 32$

$y = 8x - 32$ کے لیے قدروں کا جدول

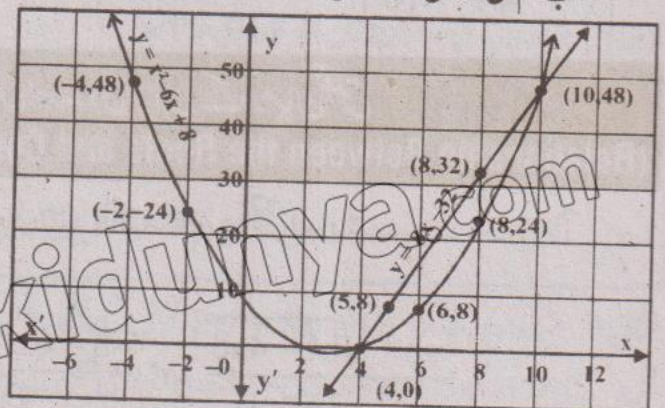
x	$y = 8x - 32$	(x, y)
8	$y = 8(8) - 32 = 32$	(8, 32)
5	$y = 8(5) - 32 = 8$	(5, 8)

اب $y = x^2 - 6x + 8$

$y = x^2 - 6x + 8$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = x^2 - 6x + 8$	(x, y)
8	$y = (8)^2 - 6(8) + 8 = 64 - 48 + 8 = 24$	(8, 24)
-4	$y = (-4)^2 - 6(-4) + 8 = 16 + 24 + 8 = 48$	(-4, 48)
-2	$y = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = 4 + 12 + 8 = 24$	(-2, 24)
6	$y = (6)^2 - 6(6) + 8 = 36 - 36 + 8 = 8$	(6, 8)

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو ملا کر گراف بناتے ہیں۔



تقاطع کے نقاط (4, 0) اور (10, 18) ہیں۔

(ii) $y + x = 2$

$y = 2x^2 + x - 10$

$y + x = 2$ (i)

$y = 2x^2 + x - 10$ (ii)

اب ہم دونوں مساواتوں کا گراف بناتے ہیں۔

سے (i)

$y + x = 2$

$y = 2 - x$

$y = 2 - x$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = 2 - x$	(x, y)
10	$y = 2 - 10 = -8$	(10, -8)
0	$y = 2 - 0 = 2$	(0, 2)

$y = 2x^2 + x - 10$ اب

$= 2 \left(x^2 + \frac{x}{2} - 5 \right)$

$= 2 \left[x^2 + \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 5 \right]$

$= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} - 5 \right]$

$= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{1+80}{16} \right) \right]$

$= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \left(\frac{81}{16} \right) \right]$

$= 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{81}{16} \right]$

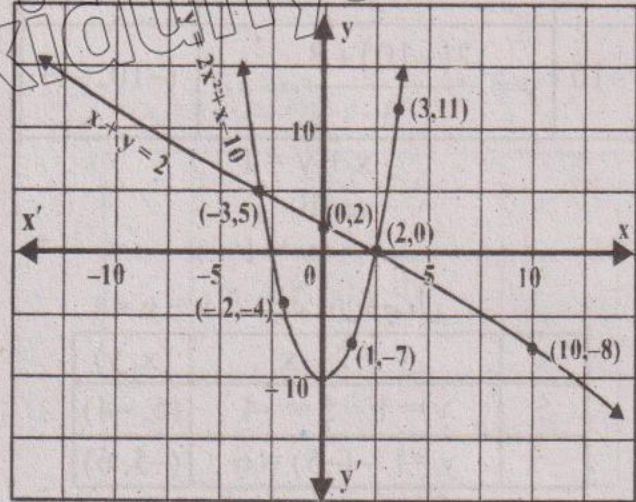
$= 2 \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{162}{16}$
 $= 2 \left(x + 0.25 \right)^2 - 10.125$
 $y = a(x - h)^2 + k$ (دو درجی تقابل کی راسی شکل)

اس کا موازنہ دو درجی تقابل کی راسی شکل سے کرنے سے
 پس راس، $(-0.25, -10.125)$ ہے۔

$y = 2x^2 + x - 10$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = 2x^2 + x - 10$	(x, y)
3	$y = 2(3)^2 + 3 - 10$ $= 18 + 3 - 10 = 11$	(3, 11)
1	$y = 2(1)^2 + 1 - 10$ $= 2 + 1 - 10 = -7$	(1, -7)
-2	$y = 2(-2)^2 - 2 - 10$ $= 8 - 12 = -4$	(-2, -4)
-3	$y = 2(-3)^2 - 3 - 10$ $= 18 - 13 = 5$	(-3, 5)

اب ہم ان دونوں مساواتوں کے نقاط کو بلا کر گراف بناتے ہیں۔



تقاطع کے نقاط $(2, 0)$ اور $(-3, 5)$ ہیں۔

دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق

2.3

(Relationship Between the Roots and Coefficients of a Quadratic Equation)

دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے، جہاں $a \neq 0$ اور a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

اس مساوات کے روٹس ہیں:

$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اور $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

فرض کیا α, β روٹس ہیں۔

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$P = \text{روٹس کا مجموعہ} = \alpha + \beta$$

$$= \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = -\frac{x \text{ کا عددی سر}}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$$

$$S = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \alpha\beta$$

$$= \alpha\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{(2a)(2a)} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{c}{a} = \frac{(\text{مستقل رقم})}{x^2 \text{ کا عددی سر}}$$

اہم نوٹ:

(i) دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ ہے۔

(ii) $\text{روٹس کا مجموعہ} = -\frac{b}{a}$ ، $\text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{c}{a}$

(iii) جب دو درجی مساوات میں x^2 کا عددی سر 1 ہو۔

• روٹس کا مجموعہ x کے عددی سر کے برابر ہوتا ہے لیکن علامت کی تبدیلی کے ساتھ۔

• روٹس کا حاصل ضرب مستقل رقم کے برابر ہوتا ہے۔

(iv) اگر $ax^2 + bx + c = 0$ کی مستقل رقم صفر ہو تو اس کے روٹس کا مجموعہ $-\frac{b}{a}$ اور روٹس کا حاصل ضرب صفر ہوتا ہے۔

مثال 9: مساوات $3x^2 + 5x - 12 = 0$ کو حل کیے بغیر روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل: $3x^2 + 5x - 12 = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے، جہاں $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$

$$a = 3, b = 5, c = -12$$

یہاں

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{3}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{3} = -4$$

مثال 10: دو درجی مساوات $x^2 + 6x + 8 = 0$ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کیجئے۔
حل: x^2 کا عددی سر 1 ہے۔

(x کے عددی سر کی علامت کی تبدیلی کے ساتھ) $\text{روٹس کا مجموعہ} = -6$
[مستقل رقم] $\text{روٹس کا حاصل ضرب} = 8$

جب روٹس دیے گئے ہوں تو دو درجی مساوات بنانا: (Form a Quadratic Equation When Roots are Given):

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ مساوات کی معیاری شکل ہے جہاں } a \neq 0 \text{ اور } c \text{ حقیقی اعداد ہیں۔}$$

فرض کیا α اور β اس کے روٹس ہیں۔ ہم روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق بیان کر چکے ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{_____ (i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{_____ (ii)}$$

نئی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ بنائی جائے گی۔
اس مساوات کو a سے تقسیم کرنے سے

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

اس مساوات کو α, β کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \quad \text{(i) اور (ii) سے}$$

یا $x^2 - (\text{روٹس کا مجموعہ})x + \text{روٹس کا حاصل ضرب} = 0$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال 11: ایسی مساوات بنائیے جس کے روٹس $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ ہوں۔

حل: پہلا طریقہ

$$x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{4} \quad \text{یہاں}$$

$$x - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{یا} \quad x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 0$$

یہ دونوں درجی مساواتیں شامل ہیں۔

$$x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$12x^2 - 17x + 6 = 0$$

مطلوبہ مساوات ہے $12x^2 - 17x + 6 = 0$

دوسرا طریقہ
مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} \quad \text{(i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{(ii)}$$

مطلوبہ مساوات ہے۔

$$x^2 - Sx + P = 0$$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$12x^2 - 17x + 6 = 0$$

سے (i) اور (ii)

مثال 12: اگر α اور β مساوات $x^2 - 7x + 10 = 0$ کے روٹس ہوں تو ایک ایسی مساوات بنائیے جس کے روٹس $2\alpha + 1$ اور $2\beta + 1$ ہوں۔

حل: جیسا کہ α اور β مساوات $x^2 - 7x + 10 = 0$ کے روٹس ہیں، اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{-7}{1} = 7 \quad \text{(i)}, \quad \alpha\beta = \frac{10}{1} = 10 \quad \text{(ii)}$$

$$S = \text{مطلوبہ مساوات کے روٹس کا مجموعہ} = 2\alpha + 1 + 2\beta + 1 = 2(\alpha + \beta) + 2 = 2(7) + 2 = 16$$

$$P = \text{مطلوبہ مساوات کے روٹس کا حاصل ضرب} = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = 4(10) + 2(7) + 1 = 55$$

مطلوبہ مساوات ہوگی:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 16x + 55 = 0$$

S اور P کی قیمتیں درج کرنے سے

مثال 13: ایسی شرط معلوم کریں کہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس مقدار میں برابر لیکن علامت میں مخالف ہوں، جہاں $a \neq 0$ ۔

حل: (دی گئی مساوات)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فرض کیا $-\alpha, -\alpha$ اس مساوات کے روٹس ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = \alpha + (-\alpha) = -\frac{b}{a}$$

$$a \neq 0 \quad \text{جہاں} \quad 0 = -\frac{b}{a}$$

اس لیے $b = 0$ مطلوبہ شرط ہے۔

چیلنج!

اگر دو درجی مساوات کا ایک روٹ دوسرے کا دو گنا ہو اور ان کی حاصل ضرب 8 ہو تو مساوات اور دونوں روٹس معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا α, β روٹس ہیں۔

سوال کی شرط I کے مطابق

$$\beta = 2\alpha$$

سوال کی شرط II کے مطابق

$$\alpha\beta = 8$$

$$\alpha(2\alpha) = 8$$

$$\because \beta = 2\alpha$$

$$2\alpha^2 = 8$$

$$\alpha^2 = \frac{8}{2}$$

$$\alpha^2 = 4$$

$$\alpha = \pm \sqrt{4}$$

$$\alpha = 2 \text{ تو } \beta = 2(2) = 4 \quad \text{اگر}$$

لہذا 4 اور 2 روٹس ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = 2 + 4 = 6$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (2)(4) = 8$$

مطلوبہ مساوات

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\alpha = -2 \text{ تو } \beta = 2(-2) = -4 \quad \text{اگر}$$

لہذا -4 اور -2 روٹس ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = -2 + (-4) = -6$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (-2)(-4) = +8$$

مطلوبہ مساوات

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - (-6)x + 8 = 0$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

حل مشق 2.3

1- مساوات معلوم کیجیے جس کے روٹس نیچے دیے گئے ہیں:

(i) -4, 9

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس -4, 9 ہیں

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = -4 + 9 = 5 \quad \text{(i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (-4)(9) = -36 \text{ (ii)}$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 5x + (-36) = 0$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0$$

(ii) 5, -7

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس 5, -7 ہیں

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = 5 + (-7) = -2 \text{ (i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (5)(-7) = -35 \text{ (ii)}$$

مطلوبہ مساوات ہے

$$x^2 - Sx + P = 0$$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - (-2)x + (-35) = 0$$

(i) اور (ii) سے

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

(iii) $\frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{-7}{5}, \frac{-6}{5}$ ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = \frac{-7}{5} + \left(\frac{-6}{5}\right)$$

$$= \frac{-7-6}{5} = \frac{-13}{5} \text{ (i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \left(\frac{-7}{5}\right)\left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{42}{25} \text{ (ii)}$$

مطلوبہ مساوات ہے $x^2 - Sx + P = 0$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - \left(\frac{-13}{5}x\right) + \frac{42}{25} = 0$$

(i) اور (ii) سے

$$x^2 + \frac{13}{5}x + \frac{42}{25} = 0$$

مساوات کے دونوں طرف 25 سے ضرب دیتے ہیں حاصل ہوا

$$25(x^2) + 25\left(\frac{13}{5}x\right) + 25\left(\frac{42}{25}\right) = 25(0)$$

$$25x^2 + 65x + 42 = 0$$

(iv) $\frac{-3}{2}, \frac{7}{2}$

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{-3}{2}, \frac{7}{2}$ ہیں۔

$S =$ روٹس کا مجموعہ $= \frac{-3}{2} + \frac{7}{2}$
 $= \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (i)

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= \left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{-21}{4}$ (ii)

مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$ ہے
 S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$x^2 - 2x + \left(\frac{-21}{4}\right) = 0$ (i) اور (ii) سے

$x^2 - 2x - \frac{21}{4} = 0$

مساوات کے دونوں طرف 4 سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوا ہے

$4(x^2 - 2x - \frac{21}{4}) = 4(0)$

$4x^2 - 8x - 21 = 0$

(v) $3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس $3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$

$S =$ روٹس کا مجموعہ $= (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})$
 $= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$ (i)

$P =$ روٹس کا حاصل ضرب $= (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$
 $= (3)^2 - (\sqrt{5})^2$
 $= 9 - 5 = 4$ (ii)

مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$ ہے۔
 S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$x^2 - 6x + 4 = 0$

(vi) $-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس $-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$

$S =$ روٹس کا مجموعہ $= (-2 + \sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3})$
 $= -2 + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}$

$$= -4 \quad \text{_____ (i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3})$$

$$= (-2)^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 4 - 3 = 1 \quad \text{_____ (ii)}$$

مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$ ہے۔

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - (-4)x + 1 = 0$$

(i) اور (ii) سے

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

2- دو درجی مساوات معلوم کیجیے جس کے روٹس مساوات $x^2 + 9x + 20 = 0$ کے روٹس سے 2 زیادہ ہوں۔

حل: $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے جہاں $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$ جبکہ

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

$$a = 1, b = 9, c = 20$$

سوال کی شرط کے مطابق فرض کیا α, β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-9}{1} = -9 \quad \text{_____ (i)}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{20}{1} = 20 \quad \text{_____ (ii)}$$

نئے روٹس $\alpha + 2, \beta + 2$

$$S' = \text{نئے روٹس کا مجموعہ} = (\alpha + 2) + (\beta + 2)$$

$$= \alpha + 2 + \beta + 2$$

$$= \alpha + \beta + 4 \quad \text{_____ (iii)}$$

$$P' = \text{نئے روٹس کا حاصل ضرب} = (\alpha + 2)(\beta + 2)$$

$$= \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4$$

$$= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 \quad \text{_____ (iv)}$$

$$\text{مطلوبہ مساوات } x^2 - Sx + P = 0 \text{ ہے}$$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - (\alpha + \beta + 4)x + \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 4 = 0 \quad \text{_____ (v)}$$

$\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں (i) اور (ii) سے مساوات (v) میں لگانے سے ہمیں حاصل ہوا۔

$$x^2 - (-9 + 4)x + 20 + 2(-9) + 4 = 0$$

$$x^2 - (-5)x + 20 - 18 + 4 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

3- وہ مساوات معلوم کیجیے جس کی اصل مساوات $x^2 - px + q = 0$ کے روٹس سے دو گنا ہوں۔

حل: $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے جہاں $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$ جبکہ

$$x^2 - px + q = 0$$

$$a = 1, b = -p, c = q$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-p)}{1} = p \quad (i)$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q \quad (ii)$$

سوال کی شرط کے مطابق نئے روٹس $2\alpha, 2\beta$ ہیں۔

$$S' = \text{نئے روٹس کا مجموعہ} = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) \quad (iii)$$

$$P' = \text{نئے روٹس کا حاصل ضرب} = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta \quad (iv)$$

مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

S اور P کی قیمتیں (iii) اور (iv) میں لگائیں۔

$$x^2 - 2(\alpha + \beta)x + 4\alpha\beta = 0 \quad (v)$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں مساوات (v) میں درج کرنے سے

$$x^2 - 2(p)x + 4(q) = 0$$

$$x^2 - 2px + 4q = 0$$

4- اگر α اور β مساوات $x^2 + 2x + 4 = 0$ کے روٹس ہوں، تو وہ مساوات معلوم کیجیے۔ جس کے روٹس درج ذیل ہیں:

$$(i) \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$$

$$(ii) \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$$

$$(iii) 2\alpha - \frac{1}{\beta}, 2\beta - \frac{1}{\alpha}$$

$$(iv) \alpha^2, \beta^2$$

$$(v) 2\alpha - 1, 2\beta - 1$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

حل: $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے جبکہ

$$a = 1, b = 2, c = 4$$

فرض کیا α اور β دی گئی مساوات کے روٹس ہیں۔

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2 \quad (i)$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \quad (ii)$$

$$(i) \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{1}{\alpha}$ اور $\frac{1}{\beta}$ ہیں۔

$$S = \text{دیے گئے روٹس کا مجموعہ} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad (A)$$

$$P = \text{نئے روٹس کا حاصل ضرب} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta}$$

(ii) سے $\alpha\beta$ کی قیمت درج کرنے سے

$$= \frac{1}{4} \quad (B)$$

لہذا، مطلوبہ مساوات ہے۔

$$x^2 - Sx + P = 0$$

A اور B سے S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج

کرنے سے

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)x + 4\left(\frac{1}{4}\right) = 4(0)$$

$$4x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(ii) \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $\frac{\alpha}{\beta}$ اور $\frac{\beta}{\alpha}$ ہیں۔

$$S = \text{دیے گئے روٹس کا مجموعہ} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= \frac{(-2)^2 - 2(4)}{4}$$

$$= \frac{4 - 8}{4}$$

$$= \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{_____ (A)}$$

$$P = \text{نئے روٹس کا حاصل ضرب} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 \quad \text{_____ (B)}$$

$$x^2 + Sx + P = 0 \quad \text{لہذا، مطلوبہ مساوات ہے۔}$$

A اور B سے P اور S کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج

کرنے سے

$$x^2 - (-1)x + 1 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$(iii) 2\alpha - \frac{1}{\beta}, 2\beta - \frac{1}{\alpha}$$

$$2\alpha - \frac{1}{\beta} \text{ اور } 2\beta - \frac{1}{\alpha} \text{ کے روٹس}$$

$$S = \text{دیے گئے روٹس کا مجموعہ}$$

$$= \left(2\alpha - \frac{1}{\beta}\right) + \left(2\beta - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= 2\alpha - \frac{1}{\beta} + 2\beta - \frac{1}{\alpha}$$

$$= 2\alpha + 2\beta - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

$$= 2(\alpha + \beta) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= 2(\alpha + \beta) - \left(\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta}\right)$$

$$= 2(\alpha + \beta) - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= 2(-2) - \left(-\frac{2}{4}\right)$$

$$= -4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-8 + 1}{2} = \frac{-7}{2} \quad \text{_____ (A)}$$

P = دیے گئے روٹس کا حاصل ضرب

$$= \left(2\alpha - \frac{1}{\beta}\right)\left(2\beta - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= 4\alpha\beta - \frac{2\alpha}{\alpha} - \frac{2\beta}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 4\alpha\beta - 2 - 2 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= 4\alpha\beta - 4 + \frac{1}{\alpha\beta}$$

(ii) سے $\alpha\beta$ کی قیمت درج کرنے سے

$$= 4(4) - 4 + \frac{1}{4}$$

$$= 16 - 4 + \frac{1}{4}$$

$$= 12 + \frac{1}{4} = \frac{48+1}{4}$$

$$= \frac{49}{4} \quad \text{--- (B)}$$

مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$ ہے۔

A اور B سے S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج

$$x^2 - \left(-\frac{7}{2}\right)x + \frac{49}{4} = 0$$

$$4x^2 + 4\left(\frac{7}{2}\right)x + 4\left(\frac{49}{4}\right) = 0$$

$$4x^2 + 2(7x) + 49 = 0$$

$$4x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$(iv) \alpha^2, \beta^2$$

مطلوبہ مساوات کے روٹس α^2 اور β^2 ہیں۔

S = نئے روٹس کا مجموعہ

$$= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= (-2)^2 - 2(4)$$

$$= 4 - 8 = -4 \quad \text{--- (A)}$$

$$P = \alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2$$

(ii) سے $\alpha\beta$ کی قیمت درج کرنے سے

$$= (4)^2 = 16 \quad \text{--- (B)}$$

پس دی گئی مساوات $x^2 - Sx + P = 0$

A اور B سے S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج

$$x^2 - (-4)x + 16 = 0$$

$$x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$(v) 2\alpha - 1, 2\beta - 1$$

مطلوبہ مساوات کے روٹس $2\alpha - 1$ اور $2\beta - 1$ ہیں۔

S = نئے روٹس کا مجموعہ

$$= (2\alpha - 1) + (2\beta - 1)$$

$$= 2\alpha - 1 + 2\beta - 1$$

$$= 2\alpha + 2\beta - 1 - 1$$

$$= 2(\alpha + \beta) - 2$$

(i) سے $\alpha + \beta$ کی قیمت درج کرنے سے

$$= 2(-2) - 2$$

$$= -4 - 2 = -6 \quad \text{--- (A)}$$

P = نئے روٹس کا حاصل ضرب

$$= (2\alpha - 1)(2\beta - 1)$$

$$= 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1$$

$$= 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$= 4(4) - 2(-2) + 1$$

$$= 16 + 4 + 1 = 21 \quad \text{--- (B)}$$

لہذا، مطلوبہ مساوات $x^2 - Sx + P = 0$ ہے۔

A اور B سے S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج

$$x^2 - (-6)x + 21 = 0$$

$$x^2 + 6x + 21 = 0$$

5- شرط معلوم کیجیے کہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

کے روٹس ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حل:

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = -\frac{b}{a} \quad \text{--- (i)}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{c}{a} \quad \text{--- (ii)}$$

اگر روٹس α اور $\frac{1}{\alpha}$ ہوں تو

$$P = \alpha \times \frac{1}{\alpha} = 1 \quad \text{--- (iii)}$$

$$P = \frac{c}{a}$$

سے (i)

$P = 1$ کی قیمت (iii) سے درج کرنے سے

$$1 = \frac{c}{a}$$

$$a = c$$

روٹس ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہوں گے اگر $a = c$

6- k کی قیمت معلوم کیجیے جب کہ مساوات

$$x^2 - (2k+4)x + (7k+1) = 0 \quad \text{کا ایک روٹ 3 ہو۔}$$

حل: (معلوم) (i) $x^2 - (2k+4)x + (7k+1) = 0$

3 = مساوات کا دیا گیا ایک روٹ

مساوات (i) میں 3 درج کرنے سے

$$(3)^2 - (2k+4)3 + (7k+1) = 0$$

$$9 - 6k - 12 + 7k + 1 = 0$$

$$-6k + 7k + 9 - 12 + 1 = 0$$

$$k - 2 = 0$$

$$k = 2$$

7- m کی قیمت معلوم کیجیے جب کہ $2x^2 + 3x + m = 0$

کے روٹس کا مجموعہ روٹس کے حاصل ضرب کا دوگنا ہو۔

حل: $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے

جہاں $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ جبکہ

$$2x^2 + 3x + m = 0$$

یہاں

$$a = 2, b = 3, c = m$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad (i)$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \quad (ii)$$

سوال کی شرط کے مطابق

$$S = 2P$$

(i) اور (ii) سے $S = P$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$-\frac{3}{2} = 2\left(\frac{m}{2}\right)$$

$$-\frac{3}{2} = m$$

$$m = -\frac{3}{2}$$

8- اگر α اور β مساوات $x^2 + ax + b = 0$ کے روٹس

ہوں اور α^2 اور β^2 مساوات $x^2 + Ax + B = 0$ کے

روٹس ہوں، تو ثابت کیجیے کہ $B = b^2, A = 2b - a^2$

ہے۔

حل: $ax^2 + bx + c = 0$ دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے

جہاں $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ جبکہ

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$a = 1, b = a \text{ اور } c = b$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{1} \quad (i)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{b}{1} = b \quad (ii)$$

اور α^2

اب α^2 اور β^2 مساوات $x^2 + Ax + B = 0$ کے روٹس ہیں۔

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{A}{1}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = -A$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -A$$

(i) اور (ii) سے $\alpha + \beta$ اور $\alpha\beta$ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$(-a)^2 - 2(b) = -A$$

$$a^2 - 2b = -A$$

$$A = 2b - a^2$$

اب

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{c}{a}$$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{B}{1}$$

$$\alpha^2\beta^2 = B$$

$$(\alpha\beta)^2 = B$$

(ii) سے $\alpha\beta$ کی قیمت درج کرنے سے

$$b^2 = B$$

$$B = b^2$$

پس ثابت ہوا کہ $A = 2b - a^2$ اور $B = b^2$

9- اگر α اور β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے

روٹس ہوں، تو شرط معلوم کیجیے کہ:

$$(i) \alpha = \beta$$

حل: جیسا کہ α اور β مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے روٹس ہیں۔

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} = -p$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$$

اگر $\alpha = \beta$ تو

$$\alpha + \alpha = 2\alpha = -p$$

$$\alpha = -\frac{p}{2}$$

$$\alpha^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 \quad \text{اور}$$

$$\alpha^2 = \frac{p^2}{4} \quad \text{(i)}$$

$$\alpha\alpha = \alpha^2 = q \quad \text{اب}$$

$$\alpha^2 = q \quad \text{(ii)}$$

مساوات (ii) میں $\alpha^2 = \frac{p^2}{4}$ درج کرنے سے

$$\frac{p^2}{4} = q$$

$$p^2 = 4q$$

لہذا مطلوبہ شرط $p^2 = 4q$ ہے۔

$$(ii) \quad \alpha = \frac{1}{\beta}$$

حل: جیسا کہ α اور β مساوات $x^2 + px + q = 0$ ہیں۔
اس لیے

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{p}{1} = -p \quad (i)$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q \quad (ii)$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta} \quad \text{دی گئی شرط ہے}$$

اگر ایک روٹ دوسرے کا معکوس ہو تو ان کا حاصل ضرب ہے۔

$$\alpha\beta = q \quad (ii)$$

$$\frac{1}{\beta}(\beta) = q \quad \therefore \alpha = \frac{1}{\beta}$$

$$1 = q$$

$$q = 1$$

پس مطلوبہ شرط $q = 1$ ہے۔

2.4 دو درجی مساوات کا فرق کنندہ (Discriminant of a Quadratic Equation)

دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے دو روٹس ہوتے ہیں۔

فرض کیا یہ روٹس α اور β ہیں۔

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اب

فرق کنندہ:

جملہ $b^2 - 4ac$ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا فرق کنندہ کہلاتا ہے یہ مساوات کے روٹس کی نوعیت یا خصوصیت کا تعین کرتا ہے۔

Nature of the Roots of a Quadratic Equation:

دو درجی مساوات کے روٹس کی نوعیت یا خصوصیت پر بحث کرنے سے پہلے، طلبہ کے لیے یہ ضروری ہے کہ وہ ناطق، غیر ناطق، حقیقی اور خیالاتی اعداد کے درمیان واضح فرق کر سکیں۔

$\sqrt{25}$ یا 5 ، $4\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{6}$ ناطق اور حقیقی اعداد ہیں۔ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{7}$ غیر ناطق اور حقیقی اعداد ہیں۔ $\sqrt{-4}$ ، $\sqrt{-7}$ ، $\sqrt{-3}$ خیالاتی یا غیر حقیقی اعداد ہیں۔

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ کے دو روٹس

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{اور} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تب ہمارے پاس درج ذیل نتائج ہوتے ہیں۔

(i) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور ایک مکمل مربع ہو تو روٹس ناطق (حقیقی) اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور ایک مکمل مربع نہ ہو تو روٹس غیر ناطق (حقیقی) اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

(iii) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو روٹس حقیقی اور مساوی ہوتے ہیں۔

(iv) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ہو تو روٹس خیالاتی (کمپلیکس کانجوگٹ) ہوتے ہیں۔

ان نتائج کو لاگو کرنے سے کسی بھی دو درجی مساواتوں کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے:

مثال 14: درج ذیل دو درجی مساواتوں کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے:

(i) $3x^2 - 8x - 2 = 0$

(ii) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

(iv) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(i) $3x^2 - 8x - 2 = 0$

$a = 3, b = -8, c = -2$ یہاں، حل:

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4(3)(-2)$

$= 64 + 24 = 88 > 0$

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور نامکمل مربع ہے۔ لہذا روٹس غیر ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

(ii) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$a = 4, b = 4, c = 1$ یہاں، حل:

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(4)(1)$

$= (4)^2 - 4(4)(1)$

$= 16 - 16 = 0$

چونکہ فرق کنندہ صفر ہے اس لیے روٹس حقیقی اور مساوی ہیں۔

(iii) $2x^2 + 3x + 4 = 0$

$2x^2 + 3x + 4 = 0$ دیا گیا

$a = 2, b = 3, c = 4$ یہاں

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (3)^2 - 4(2)(4)$

$= 9 - 32$

$= -23 < 0$

حل:

جو کہ منفی ہے اس لیے روٹس خیالاتی ہیں۔

(iv) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$a = 1, b = 4, c = 3$ یہاں

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(1)(3)$

$= 16 - 12$

$= 4 = 2^2 > 0$

حل: دیا گیا

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور مکمل مربع ہے۔ اس لیے روٹس ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

نوٹ: اگر $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ناطق ہوں تو $b^2 - 4ac$ ضرور مکمل مربع ہوگا۔

مثال 15: اگر مساوات $(k+1)x^2 + (2k-1)x + (k-1) = 0$ کے روٹس برابر ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔
حل:

یہاں، $a = k+1, b = 2k-1, c = k-1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac = 0$ (روٹس برابر ہیں)

$(2k-1)^2 - 4(k+1)(k-1) = 0$

$(4k^2 - 4k + 1) - 4(k^2 - 1) = 0$

$4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 = 0$

$-4k + 5 = 0$

$4k = 5$

$k = \frac{5}{4}$

حل مشق 2.4

1- درج ذیل دو درجی مساواتوں کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے:

(i) $3x^2 - 9x - 2 = 0$

$3x^2 - 9x - 2 = 0$

$a = 3, b = -9, c = -2$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-9)^2 - 4(3)(-2)$

$= 81 + 24$

$= 105 > 0$

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور مکمل مربع نہیں ہے۔ لہذا روٹس غیر

ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

(ii) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$a = 1, b = 6, c = 9$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (6)^2 - 4(1)(9)$

$= 36 - 36$

$= 0$

چونکہ فرق کنندہ صفر ہے۔ لہذا، روٹس حقیقی اور مساوی ہیں۔

(iii) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

$2x^2 + 4x + 5 = 0$

$a = 2, b = 4, c = 5$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (4)^2 - 4(2)(5)$

$= 16 - 40$

$= -24 < 0$

حل:

یہاں

(iv) $7x^2 - 6x - 1 = 0$

$7x^2 - 6x - 1 = 0$

$a = 7, b = -6, c = -1$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4(7)(-1)$

$= 36 + 28$

$= 64 = 8^2$

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور مکمل مربع ہے۔ لہذا، روٹس ناطق اور

غیر مساوی ہیں۔

(v) $5x^2 - 2x + 10 = 0$

$a = 5, b = -2, c = 10$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4(5)(10)$

$= 4 - 200$

$= -196 < 0$

چونکہ فرق کنندہ منفی ہے، لہذا، روٹس خیالی ہیں۔

(vi) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$a = 1, b = -8, c = 16$

فرق کنندہ $= b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4(1)(16)$

$= 64 - 64$

$= 0$

چونکہ فرق کنندہ صفر ہے۔ لہذا، روٹس حقیقی اور مساوی ہیں۔

حل:

یہاں

حل:

یہاں

حل:

یہاں

حل:

یہاں

2- اس کی کن قیمتوں کے لیے مساوات $3x^2 + x + 9t = 0$ کے روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہوں گے۔
حل:

$$3x^2 + x + 9t = 0$$

$$a = 3, b = 1, c = 9t$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac > 0 \quad (\text{روٹس حقیقی اور غیر برابر ہیں})$$

$$= (1)^2 - 4(3)(9t) > 0$$

$$1 - 108t > 0$$

$$-108t > -1$$

$$108t < 1$$

(دونوں اطراف کو 1 سے ضرب دینے سے، < کو > میں تبدیل کرنے سے بھی)

$$t < \frac{1}{108}$$

(دونوں اطراف کو 108 سے تقسیم کرنے سے)

3- اگر دو درجی مساوات $16x^2 + 7px + 49 = 0$ کے روٹس مساوی ہوں تو p کی قیمت معلوم کیجیے۔
حل:

$$16x^2 + 7px + 49 = 0$$

$$a = 16, b = 7p, c = 49 \quad \text{یہاں}$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac = 0 \quad (\text{روٹس برابر ہیں})$$

$$(7p)^2 - 4(16)(49) = 0$$

$$49p^2 - 3136 = 0$$

$$49p^2 = 3136$$

$$p^2 = \frac{3136}{49}$$

$$p^2 = 64$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{p^2} = \sqrt{64}$$

$$p = \pm 8$$

4- اگر دو درجی مساوات $4u^2 + 8u + q = 0$ کے روٹس غیر مساوی اور حقیقی ہوں تو q کی ممکنہ قیمتیں معلوم کیجیے۔
حل:

$$4u^2 + 8u + q = 0$$

$$a = 4, b = 8, c = q \quad \text{یہاں}$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac > 0 \quad (\text{روٹس حقیقی اور غیر مساوی ہیں})$$

$$(8)^2 - 4(4)(q) > 0$$

$$64 - 16q > 0$$

$$-16q > -64$$

$$16q < 64$$

(دونوں اطراف کو 1 سے ضرب دینے سے، < کو > میں تبدیل کرنے سے بھی)

$$q < \frac{64}{16}$$

$$q < 4$$

(دونوں اطراف کو 16 سے تقسیم کرنے سے)

5- m کی قیمت معلوم کیجیے اگر دو درجی مساوات $mx^2 - 8x + 1 = 0$ کے روٹس حقیقی اور مساوی ہوں۔
حل:

$$mx^2 - 8x + 1 = 0$$

$$a = m, b = -8, c = 1 \quad \text{یہاں}$$

$$\text{روٹس حقیقی اور مساوی ہیں} \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \text{فرق کنندہ}$$

$$(-8)^2 - 4(m)(1) = 0$$

$$64 - 4m = 0$$

$$-4m = -64$$

$$4m = 64$$

$$m = \frac{64}{4}$$

$$m = 16$$

ایک متغیر میں دو درجی غیر مساوات کا حل

2.5

(Solution of Quadratic Inequalities in One Unknown)

غیر مساوات

ریاضی میں غیر مساوات ایک ایسا تعلق ہے جو دو اعداد یا دیگر ریاضیاتی جملوں کے درمیان غیر مساوی موازنہ کرتا ہے۔ ہم غیر مساوات کی علامتوں جیسے $<$ (چھوٹا ہے)، $>$ (بڑا ہے)، $\leq$ (چھوٹا یا مساوی ہے) اور $\geq$ (بڑا یا مساوی ہے) کا استعمال کرنا سیکھ چکے ہیں۔ یہاں ہم ایک متغیر میں دو درجی غیر مساوات کو حل کرنے کا طریقہ سیکھیں گے۔

دو درجی غیر مساوات کو حل کرنے کے درج ذیل پراقتہانات ہیں:

(i) متعلقہ مساوات کو حل کرنا۔
(ii) وقفوں کا تعین کرنا۔

(iii) ہر وقفہ میں ٹیسٹ پوائنٹس لیں۔
(iv) نتیجہ اخذ کرنا۔

مثال 16: غیر مساوات $x^2 - 5x + 6 > 0$ کو حل کیجیے۔

حل: $x^2 - 5x + 6 > 0$

مرحلہ I: متعلقہ مساوات کو حل کیجیے۔

روٹس معلوم کرنے کے لیے دو درجی جملہ کو صفر کے برابر رکھیں۔

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$$

$$x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

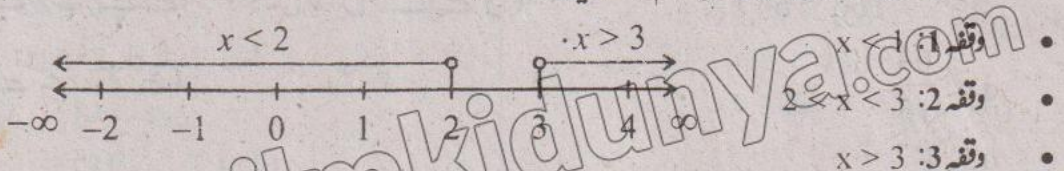
$$x - 2 = 0 \text{ یا } x - 3 = 0$$

اب،

لہذا $x = 2$ اور $x = 3$ حل ہیں۔

مرحلہ II: وقفوں کا تعین کیجیے۔

نقاط عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



مرحلہ III: ہر وقفہ میں ٹیسٹ پوائنٹس لیں۔

ہر وقفہ سے ٹیسٹ پوائنٹس لیں اور اسے غیر مساوات میں درج کیجیے۔

- لیے: $x = 1$: $(1-2)(1-3) = 2 > 0$ پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔
- $x = 2.5$ کے لیے: $(2.5-2)(2.5-3) = -0.25 < 0$ پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔
- $x = 4$ کے لیے: $(4-2)(4-3) = 2 > 0$ پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

مرحلہ IV: نتیجہ:

$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ غیر مساوات $x^2 - 5x + 6 > 0$ کا حل ہے۔

مثال 17: غیر مساوات $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ کو حل کیجیے۔

حل: $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

مرحلہ I: متعلقہ مساوات کو حل کیجیے۔

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x - x + 2 = 0$$

$$2x(x-2) - 1(x-2) = 0$$

$$(x-2)(2x-1) = 0$$

$$(2x-1)(x-2) = 0$$

$$2x-1=0 \text{ یا } x-2=0 \quad \text{اب،}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ اور } x = 2 \text{ حل ہیں}$$

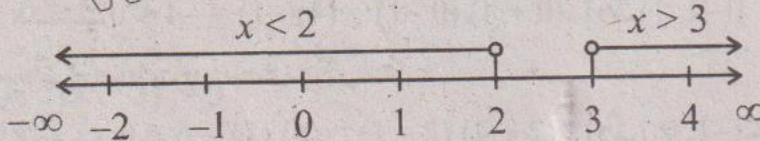
نوٹ:

جب مساوات میں $<$ یا $>$ کی علامت ہو تو ہم کھلا وقفہ (a, b) استعمال کرتے ہیں۔ جب مساوات میں $\leq$ یا $\geq$ کی علامت ہو تو ہم بند وقفہ $[a, b]$ استعمال کرتے ہیں۔

یہاں $(2, 0)$ اور $(\frac{1}{2}, 0)$ عددی نقاط ہیں۔

مرحلہ II: وقفہ معلوم کیجیے۔

نقاط $(\frac{1}{2}, 0)$ اور $(2, 0)$ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔



وقفہ 1: $x < \frac{1}{2}$

وقفہ 2: $\frac{1}{2} < x < 2$

وقفہ 3: $x > 2$

مرحلہ III: ہر وقفہ میں ٹیسٹ پوائنٹ لیں۔

• $x = 0$ کے لیے: $(2(0)-1)(0-2) = (-1)(-2) = 2 > 0$

پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا۔

• $x = 1$ کے لیے: $(2(1)-1)(1-2) = (1)(-1) = -1 < 0$

پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

• $x = 3$ کے لیے: $(2(3)-1)(3-2) = (6-1)(1) = 5 > 0$

پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا۔

مرحلہ IV: نتیجہ:

$x \in [\frac{1}{2}, 2]$ غیر مساوات کا حل ہے۔

1- درج ذیل غیر مساواتوں کو حل کیجیے۔

(i) $x^2 + 3x - 4 > 0$

$x^2 + 3x - 4 > 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x^2 + 4x - x - 4 = 0$

$x(x + 4) - 1(x + 4) = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

یا $x - 1 = 0$

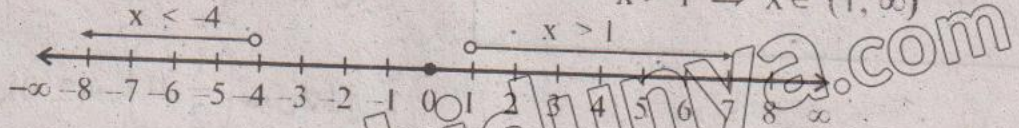
یا $x = 1$

لہذا، حل $x = -4$ اور $x = 1$ ہیں۔ پس، اہم نقاط $(-4, 0)$ اور $(1, 0)$ ہیں۔ یہ اہم نقاط عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

وقفہ 1: $x < -4 \Rightarrow x \in (-\infty, -4)$

وقفہ 2: $-4 < x < 1 \Rightarrow x \in (-4, 1)$

وقفہ 3: $x > 1 \Rightarrow x \in (1, \infty)$



ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹس

$x = -5$ کے لیے $(-5 + 4)(-5 - 1) = (-1)(-6) = 6 > 0$ [وقفہ میں $(-\infty, -4)$ میں]

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$x = 0$ کے لیے $(0 + 4)(0 - 1) = (4)(-1) = -4 < 0$ [وقفہ $(-4, 1)$ میں]

پس، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$x = 2$ کے لیے $(2 + 4)(2 - 1) = (6)(1) = 6 > 0$ [وقفہ $(1, \infty)$ میں]

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

نتیجہ: اس غیر مساوات کا حل $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$ ہے۔

(ii) $2x^2 - 8x + 6 > 0$

$2x^2 - 8x + 6 > 0$

$2x^2 - 8x + 6 = 0$

$2x^2 - 6x - 2x + 6 = 0$

$2x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

$(x - 3)(2x - 2) = 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3$

یا $2x - 2 = 0$

یا

$x = \frac{2}{2} = 1$

متعلقہ مساوات ہے

حل:

پہلے $x = 1$ اور $x = 3$ ہیں۔

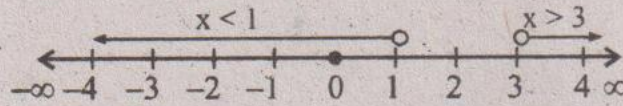
پس، اہم نقاط $(1, 0)$ اور $(3, 0)$ ہیں۔

یہ اہم نقاط $(1, 0)$ اور $(3, 0)$ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

وقفہ 1: $x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

وقفہ 2: $1 < x < 3 \Rightarrow x \in (1, 3)$

وقفہ 3: $x > 3 \Rightarrow x \in (3, \infty)$



ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹس

$x = 0$ کے لیے $(0 - 3)(2(0) - 2) = (-3)(-2) = 6 > 0$ [وقفہ $(-\infty, 1)$ میں]

پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$x = 2$ کے لیے $(2 - 3)(2(2) - 2) = (-1)(4 - 2) = (-1)(2) = -2 < 0$ [وقفہ $(1, 3)$ میں]

پس، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$x = 4$ کے لیے $(4 - 3)(2(4) - 2) = (1)(8 - 2) = (1)(6) = 6 > 0$ [وقفہ $(3, \infty)$ میں]

پس یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

نتیجہ:

اس غیر مساوات کا حل $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ ہے۔

حل:

متعلقہ مساوات ہے۔

(iii) $x^2 + x - 6 < 0$

$x^2 + x - 6 < 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$

$x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

$x + 3 = 0$ یا $x - 2 = 0$

$x = -3$ یا $x = 2$

لہذا، حل $x = -3$ اور $x = 2$ ہیں۔

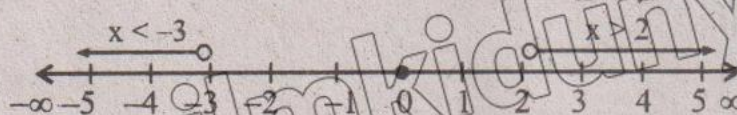
پس، اہم نقاط $(-3, 0)$ اور $(2, 0)$ ہیں۔

یہ اہم نقاط $(-3, 0)$ اور $(2, 0)$ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

وقفہ 1: $x < -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3)$

وقفہ 2: $-3 < x < 2 \Rightarrow x \in (-3, 2)$

وقفہ 3: $x > 2 \Rightarrow x \in (2, \infty)$



ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹس

$x = -4$ کے لیے $(-4 + 3)(-4 - 2) = (-1)(-6) = 6 > 0$ [وقفہ $(-\infty, -3)$ میں]

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$$x = 0 \text{ کے لیے } (0 + 3)(0 - 2) = (3)(-2) = -6 < 0 \text{ : وقفہ } (-3, 2) \text{ میں}$$

یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$$x = 3 \text{ کے لیے } (3 + 3)(3 - 2) = (6)(1) = 6 > 0 \text{ : وقفہ } (2, \infty) \text{ میں}$$

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

نتیجہ:

اس غیر مساوات کا حل $(-3, 2)$ ہے۔

حل:

$$(iv) x^2 - 6x + 9 < 0$$

$$x^2 - 6x + 9 < 0$$

متعلقہ مساوات ہے۔

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 3x - 3x + 9 = 0$$

$$x(x - 3) - 3(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0$$

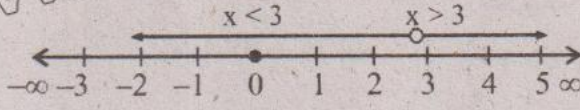
$$x = 3 \quad \text{یا} \quad x = 3$$

لہذا، حل صرف ایک $x = 3$ ہے (صرف ایک نقطہ ہے)

یہ اہم نقطہ عددی خط کو دو وقفوں میں تقسیم کرتا ہے۔

$$\text{وقفہ 1: } x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$$

$$\text{وقفہ 2: } x > 3 \Rightarrow x \in (3, \infty)$$



ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹ

$$x = 0 \text{ کے لیے } (0 - 3)(0 - 3) = (-3)(-3) = 9 > 0 \text{ : وقفہ } (-\infty, 3) \text{ میں}$$

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$$x = 4 \text{ کے لیے } (4 - 3)(4 - 3) = (1)(1) = 1 > 0 \text{ : وقفہ } (3, \infty) \text{ میں}$$

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$$x = 3 \text{ کے لیے } (3 - 3)(3 - 3) = 0 \not< 0 \text{ : وقفہ } (3, \infty) \text{ میں}$$

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

کوئی حقیقی عدد ایسا نہیں ہے جو غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

کوئی حل نہیں ہے (خالی ہوتا ہے)

$$(v) 4x^2 - 16x + 15 \leq 0$$

$$4x^2 - 16x + 15 \leq 0$$

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$4x^2 - 10x - 6x + 15 = 0$$

متعلقہ مساوات ہے۔

حل:

$$2x(2x - 5) - 3(2x - 5) = 0$$

$$(2x - 5)(2x - 3) = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ اور } x = \frac{3}{2} \text{ حل}$$

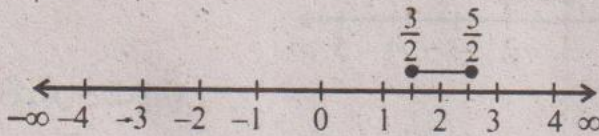
اس طرح اہم نقاط $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ اور $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ہیں۔

یہ اہم نقاط $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ اور $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

$$x < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right), \quad \text{وقفہ 1:}$$

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad \text{وقفہ 2:}$$

$$x > \frac{5}{2} \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right), \quad \text{وقفہ 3:}$$



ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹس:

$$x = 0 \text{ کے لیے } (2(0) - 5)(2(0) - 3) = (-5)(-3) = 15 > 0 \quad \text{وقفہ } \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \text{ میں}$$

لہذا، یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

$$x = 2 \text{ کے لیے } (2(2) - 5)(2(2) - 3) = (4 - 5)(4 - 3) = (-1)(1) = -1 < 0 \quad \text{وقفہ } \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ میں}$$

یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$$x = 3 \text{ کے لیے } (2(3) - 5)(2(3) - 3) = (6 - 5)(6 - 3) = (+1)(3) = +3 > 0 \quad \text{وقفہ } \left[\frac{5}{2}, \infty\right) \text{ میں}$$

یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت نہیں کرتا ہے۔

نتیجہ:

$$(vi) -x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

$$-x^2 + 3x - 2 \geq 0$$

حل:

متعلقہ مساوات ہے۔

$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$-1(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = 0$$

$$x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 1 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

پس، حل $x = 2$ اور $x = 1$ ہیں۔

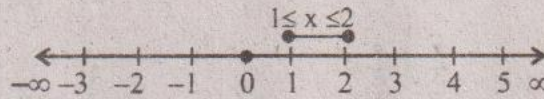
اس طرح اہم نقاط $(1, 0)$ اور $(2, 0)$ ہیں۔

یہ اہم نقاط $(1, 0)$ اور $(2, 0)$ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

$$x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \quad \text{وقفہ 1:}$$

$$1 < x < 2 \Rightarrow x \in [1, 2] \quad \text{وقفہ 2:}$$

$$x > 2 \Rightarrow x \in [2, \infty) \quad \text{وقفہ 3:}$$



$$x = 0 \text{ کے لیے } (0 - 2)(0 - 1) = (-2)(-1) = 2 > 0 \quad \text{وقفہ } (-\infty, -1) \text{ میں}$$

یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$$x = \frac{3}{2} \text{ کے لیے } \left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$$

یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

$$x = 3 \text{ کے لیے } (3 - 2)(3 - 1) = (1)(2) = 2 > 0 \quad \text{وقفہ } (2, \infty) \text{ میں}$$

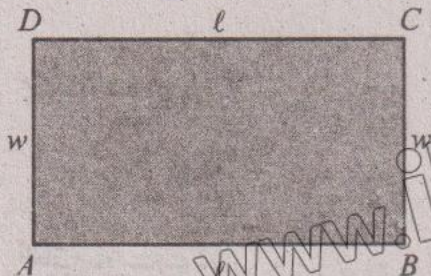
یہ وقفہ غیر مساوات کو درست ثابت کرتا ہے۔

نتیجہ: غیر مساوات کا حل $[1, 2]$ ہے۔

2.6 کلیے کا سبجیکٹ تبدیل کرنا (Changing the Subject of Formula)

2.6

ایک کلیے کسی مسئلے یا صورتحال میں مختلف قابل پیمائش مقداروں کے درمیان تعلق کو مساوات کی شکل میں ظاہر کرتا ہے۔ بائیں طرف



دی گئی شکل ایک مستطیل ہے۔ اس کی لمبائی l یونٹس اور چوڑائی w یونٹس ہے۔

فرض کریں کہ P اس کا محیط ہے۔

$$P = l + w + l + w$$

اب،

$$= 2l + 2w$$

$$P = 2(l + w) \quad \text{یونٹس}$$

مستطیل کے احاطہ (P) کے لیے کلیہ بنایا ہے۔ اوپر دیے گئے کلیہ $P = 2(l + w)$ میں بائیں ہاتھ کی طرف صرف P سبجیکٹ ہے جب کہ دائیں ہاتھ کی طرف موجودہ طرف کو کلیہ کی رقم کہا جاتا ہے۔
 کسی لمبائی l والے مربع کا احاطہ $P = 4l$ ہوتا ہے۔
 ہم کلیے کا سبیکٹ P تبدیل کر کے کلیے کو دوبارہ یوں لکھتے ہیں: $l = \frac{1}{4}P$ یا $l = \frac{P}{4}$ اگر P کی قیمت دی گئی ہو تو ہم براہ راست l کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 18: ایک دائرے کا رقبہ $A = \pi r^2$ ہے۔ r کو کلیے کا سبیکٹ بنائیے۔

حل: $A = \pi r^2$ یا $r^2 = \frac{A}{\pi}$

$\pi r^2 = A$ یا $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ [r ہمیشہ مثبت ہوتا ہے]

حل مشق 2.6

1- F کو کلیے $C^\circ = \frac{5}{9}(F^\circ - 32)$ کا سبیکٹ بنائیے۔

$C = \frac{5}{9}(F^\circ - 32)$

$\frac{5}{9}(F^\circ - 32) = C$

$\frac{9}{5} \times \frac{5}{9}(F^\circ - 32) = \frac{9}{5}C$

$F^\circ - 32 = \frac{9}{5}C$

$F^\circ = \frac{9}{5}C + 32$

2- سادہ منافع معلوم کرنے کا کلیہ $I = PRT$ ہے۔

(b) T کو کلیے کا سبیکٹ بنائیے۔

$I = PRT$ حل:

$PRT = I$ یا

$T = \frac{I}{PR}$

(a) P کو کلیے کا سبیکٹ بنائیے۔

$I = PRT$ حل:

$PRT = I$ یا

$P = \frac{I}{RT}$

3- $S = 2a + (n-1)d$ کا سبیکٹ بنائیے۔

$S = 2a + (n-1)d$

$2a + (n-1)d = S$ یا

$2a = S - (n-1)d$

$a = \frac{S - (n-1)d}{2}$

4- ایک سنڈر کے حجم کا کلیہ $V = \pi r^2 h$ ہے۔ h کو کلیے کا سبجیکٹ بنائیے۔
حل:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\pi r^2 h = V \quad \text{یا}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

5- ایک ذوزنقہ کے رقبے کا کلیہ $A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$ ہے۔ h کو کلیے کا سبجیکٹ بنائیے۔

$$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$$

$$\frac{1}{2} h (b_1 + b_2) = A \quad \text{یا}$$

$$h (b_1 + b_2) = 2A$$

$$h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$$

6- اگر $y = mx + c$ تو x کو اس مساوات کا سبجیکٹ بنائیے۔
حل:

$$y = mx + c$$

$$mx + c = y \quad \text{یا}$$

$$mx = y - c$$

$$x = \frac{y - c}{m}$$

7- مستطیل کے احاطہ (P) کا کلیہ $P = 2(\ell + w)$ ہے۔ ℓ کو اس کلیے کا سبجیکٹ بنائیے۔
حل:

$$P = 2(\ell + w)$$

$$2(\ell + w) = P \quad \text{یا}$$

$$\ell + w = \frac{P}{2}$$

$$\ell = \frac{P}{2} - w$$

$$\ell = \frac{P - 2w}{2}$$

8- ایک پیرابولا کی مساوات $y^2 = 4ax$ ہے۔ x کو مساوات کا سبجیکٹ بنائیے۔
حل:

$$y^2 = 4ax$$

$$4ax = y^2 \quad \text{یا}$$

$$x = \frac{y^2}{4a}$$

9- اگر $P = S - C$ ہو، جہاں S قیمت فروخت اور C قیمت خرید ہے تو S کو مساوات کا سبجیکٹ بنائیے۔
حل:

$$P = S - C$$

$$S - C = P$$

$$S = P + C$$

10- مخروط کے حجم کا کلیہ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ہے۔ h کو کلیے کا سبجیکٹ بنائیے۔

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = V$$

$$\pi r^2 h = 3V$$

$$h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

حل:

2.7 حقیقی دنیا میں دو درجی مساوات کا اطلاق (Applications of Quadratic Equation in Real World)

مثال 19: ایک گیند کو 20 ms^{-1} کی ابتدائی ولاشی سے اوپر کی طرف پھینکا جاتا ہے۔ زمین پر واپس آنے کا وقت اور زمین سے زیادہ سے زیادہ بلندی معلوم کیجیے۔

حل: زیادہ سے زیادہ بلندی: سب سے اونچے مقام پر گیند کی ولاشی صفر ہوتی ہے۔ لہذا ہمارے پاس درج ذیل مقداریں ہیں:

$$\text{ابتدائی ولاشی} = v_i = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{آخری ولاشی} = v_f = 0 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{ثقلی اسراع} = g = -10 \text{ m s}^{-2} \quad (\text{گریویٹیشنل ایکسلریشن})$$

$$\text{فاصلہ} = s = ?$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gs$$

v_i اور g کی قیمتیں درج کرنے سے

$$0^2 = (20)^2 + 2(-10)s$$

$$0 = 400 - 20s$$

$$s = \frac{400}{20} = 20 \text{ m}$$

پس

واپس کا زیادہ سے زیادہ وقت:

جب گیند اس مقام پر واپس آتی ہے جہاں سے اسے پھینکا گیا تھا تو اس کا ہٹاؤ (s) صفر ہوتا ہے۔ ہمارے پاس درج ذیل معلومات ہیں:

$$\text{ہٹاؤ} = s = 0$$

$$\text{ابتدائی ولاشی} = v_i = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{ثقلی اسراع} = g = -10 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{وقت} = t = ?$$

نوٹ:

حرکت کی مساواتیں خط مستقیم میں یکساں اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والی اشیاء کے لیے ہٹاؤ، ولاشی، وقت اور اسراع کے درمیان تعلق کو بیان کرتی ہیں:

$$\text{پہلی مساوات:} \quad v_f = v_i + at$$

$$\text{دوسری مساوات:} \quad s = v_i t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\text{تیسری مساوات:} \quad v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

v_i اور g کی قیمتیں درج کرنے سے

$$0 = 20t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

$$0 = 20t - 5t^2$$

$$0 = t[20 - 5t]$$

$$t = 0 \text{ سیکنڈ یا } 20 - 5t = 0 \Rightarrow t = \frac{20}{5} = 4 \text{ سیکنڈ، اب}$$

(i) سیکنڈ $t = 0$ ، مطلب یہ ہے کہ گیند کا ہٹاؤ صفر تھا جب اس کو پھینکا گیا۔

(ii) سیکنڈ $t = 4$ ، مطلب یہ ہے کہ گیند 4 سیکنڈ کے بعد زمین پر واپس آئی۔

مثال 20: ایک کمپنی اپنے منافع (P) (روپے ہزاروں میں) کو دو درجی مساوات $P(x) = -2x^2 + 80x - 500$ سے ماڈل کرتی ہے، جہاں x کسی چیز کی قیمت روپوں میں ہے۔ وہ قیمت معلوم کریں جو سب سے زیادہ منافع دیتی ہے اور سب سے زیادہ منافع بھی معلوم کریں۔

$$P(x) = -2x^2 + 80x - 500$$

چونکہ $-2 < 0$ ہے، لہذا پیرابولا نیچے کی جانب کھلتا ہے اور اس سب سے بڑا نقطہ فراہم کرتا ہے۔

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2(-2)} = \frac{-80}{-4} = 20$$

لہذا، وہ قیمت جو زیادہ سے زیادہ منافع دیتی ہے وہ 20 روپے ہے۔

$$P(20) = -2(20)^2 + 80(20) - 500$$

$$= -2(400) + 1600 - 500$$

$$= 300 \text{ (ہزاروں میں)}$$

لہذا سب سے زیادہ منافع 300,000 روپے ہے۔

مثال 21: ایک گیند کو زمین سے کی طرف پھینکا جاتا ہے۔ t سیکنڈ کے بعد اس کی بلندی (میٹر میں) ماڈل کی گئی ہے:

$$h(t) = -5t^2 + 20t$$

کس وقت گیند زمین سے کم از کم 15 میٹر اوپر ہوگی؟

حل:

$$-5t^2 + 20t \geq 15 \quad \text{یہاں،}$$

$$-5t^2 + 20t - 15 \geq 0$$

$$5t^2 - 20t + 15 \leq 0$$

دو درجی مساوات $5t^2 - 20t + 15 = 0$ کو حل کرنے سے

$$t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(5)(15)}}{2(5)}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{10} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{10}$$

$$= \frac{20 \pm 10}{10}$$

$$= \frac{20 - 10}{10}, \frac{20 + 10}{10}$$

$$= 1, 3$$

لہذا، گیند زمین سے کم از کم 15 میٹر کی بلندی پر ہوگی جب $1 \leq t \leq 3$ سیکنڈ ہو۔

حل مشق 2.7

- 1- ایک شہر کی آبادی کو مساوات $P(t) = -2t^2 + 40t + 800$ سے ماڈل کیا گیا ہے، جہاں t برطانیہ 2020ء سالوں میں ہے۔ وہ سال معلوم کریں جب آبادی کم از کم 1000 ہوگی۔
حل: ہم معلوم کرتے ہیں جب کہ $P(t) \geq 1000$ یہاں

$$\begin{aligned} -2t^2 + 40t + 800 &\geq 1000 \\ -2t^2 + 40t + 800 - 1000 &\geq 0 \\ -2t^2 + 40t - 200 &\geq 0 \end{aligned}$$

دونوں اطراف کو -2 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} t^2 - 20t + 100 &\leq 0 \\ (t)^2 - 2(t)(10) + (10)^2 &\leq 0 \\ (t-10)^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\begin{aligned} t - 10 &= 0 \quad (\text{مربعی عدد منفی نہیں ہو سکتا ہے}) \\ t &= 10 \end{aligned}$$

- جہاں 2020 سے سالوں کی نمائندگی کرتا ہے۔
2- ایک کمپنی اپنے منافع P (روپے ہزاروں میں) کو مساوات $P(x) = -5x^2 + 150x - 1000$ سے ماڈل کرتی ہے، جہاں x فی شے کی قیمت (روپے میں) ہے۔ وہ قیمت معلوم کریں جو سب سے زیادہ منافع دیتی ہے۔
حل: یہ پیرابولا نیچے کی جانب کھلتا ہے اور اس سب سے بڑا نقطہ فراہم کرتا ہے۔

$$P(x) = -5x^2 + 150x - 1000$$

$$a = -5, b = 150, c = -1000$$

x کو آرڈینیٹ کے لیے اسی کلیہ استعمال کرنے سے

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{2(-5)} = \frac{-150}{-10} = 15$$

- لہذا، وہ قیمت جو زیادہ سے زیادہ منافع دیتی ہے 15 روپے ہے۔
3- ایک کھلونا کارڈھلوان پر پہنچ جاتی ہے جب کہ اس کے طے کردہ فاصلے (d) کو مساوات $d = t^2 - 0.5t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں وقت ایک سیکنڈ میں ہے۔ وہ وقت معلوم کریں جب کارڈ نے 12.5 میٹر کا فاصلہ طے کیا ہو۔
حل: ہم معلوم کرتے ہیں جب کہ $d = 12.5$

$$\begin{aligned} d &= t^2 - 0.5t \\ 12.5 &= t^2 - 0.5t \\ 0 &= t^2 - 0.5t - 12.5 \\ t^2 - 0.5t - 12.5 &= 0 \end{aligned}$$

اعشاریہ کو ختم کرنے کے لیے 2 سے ضرب دینے سے

$$2t^2 - t - 25 = 0$$

$$a = 2, b = -1, c = -25$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-25)}}{2(2)}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 200}}{4}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{201}}{4}$$

$$t = \frac{1 \pm 14.18}{4}$$

$$t = \frac{1 + 14.18}{4}, t = \frac{1 - 14.18}{4}$$

$$t = \frac{15.18}{4} \Rightarrow t = 3.795, t = \frac{-13.18}{4} \Rightarrow t = -3.295$$

($t = 3.795$) جیسا کہ وقت منفی نہیں ہو سکتا ہے کیونکہ یہ 0 (موجودہ) سے شروع ہوتی ہے اور مثبت سمت میں حرکت کرتا ہے۔ پس، کار نے 3.8 سیکنڈ میں 12.5 میٹر (تقریباً) کا فاصلہ طے کیا ہے۔

4- ایک گیند کی بلندی (میٹروں میں) t سیکنڈوں کے بعد $h(t) = -4t^2 + 24t$ ہے۔ کس وقت گیند زمین سے کم از کم 20 میٹر اوپر ہوگی؟

حل: ہم وقفہ معلوم کرتے ہیں جبکہ $h(t) \geq 20$ غیر مساوات کو ترتیب دیں۔

$$-4t^2 + 24t \geq 20$$

$$-4t^2 + 24t - 20 \geq 0$$

$$t^2 - 6t + 5 \leq 0$$

دونوں اطراف کو -4 سے تقسیم کرنے سے

متعلقہ دو درجی مساوات ہے۔

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t^2 - 5t - t + 5 = 0$$

$$t(t - 5) - 1(t - 5) = 0$$

$$(t - 5)(t - 1) = 0$$

$$t - 5 = 0$$

$$t - 1 = 0$$

$$t = 5$$

$$t = 1$$

چونکہ غیر مساوات ≤ 0 ہے (اور حل شدہ پیرابولا اوپر کی طرف کھلتا ہے) حل روش کے درمیان 1 اور 5 کے درمیان ہونا چاہیے۔
ٹیٹ پوائنٹ 2 = 1 کو چیک کریں۔

$$(2-5)(2-1) = (-3)(+1) = -3 < 0$$

لہذا، وقفہ درست ہے۔

اس لیے گیند وقفہ $1 \leq t \leq 5$ کے لیے زمین سے سم ازوم 20 میٹر اوپر ہے۔

5- ایک گیند کو 40ms^{-1} کی ابتدائی ولاشی کے ساتھ اوپر کی طرف پھینکا جاتا ہے۔ گیند کی سطح زمین سے زیادہ سے زیادہ بلندی معلوم کریں۔

حل: اس کے بلند ترین مقام پر، گیند کی رفتار صفر ہے۔

$$v_i = 40\text{ms}^{-1} \text{ ابتدائی ولاشی}$$

$$v_f = 0\text{ms}^{-1} \text{ آخری ولاشی}$$

$$g = -10\text{ms}^{-2} \text{ ثقلی اسراع}$$

$$s = ? \text{ فاصلہ (ہٹاؤ)}$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2gs \text{ حرکت کی متعلقہ مساوات}$$

v_i اور v_f کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$0^2 - (40)^2 + 2(-10)s$$

$$0^2 - (40)^2 = 2(-10)s$$

$$0 - 1600 = -20s$$

$$-1600 = -20s$$

$$\Rightarrow 20s = 1600$$

$$s = \frac{1600}{20}$$

$$s = 80 \text{ m}$$

پس، زیادہ سے زیادہ اونچائی جس تک گیند سطح زمین سے اوپر پہنچی وہ 80m ہے۔

6- ایک فری لانسر کی کمائی E (روپے میں) فی ہفتہ h (گھنٹوں میں) کو ماڈل $E(h) = -2h^2 + 40h$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ سب سے زیادہ کمائی کے لیے اسے زیادہ سے زیادہ کتنے گھنٹے کام کرنا چاہیے؟

$$E(h) = -2h^2 + 40h$$

حل:

ہمیں تفاعل $E(h)$ کو زیادہ سے زیادہ کرنے کی ضرورت ہے۔ یہ پیرابولا کا اس معلوم کر رہا ہے۔

عدوی سروں کی شناخت:

$$a = -2, b = 40$$

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$h = \frac{-40}{2(-2)} = \frac{-40}{-4} = 10$$

اس لیے اسے زیادہ سے زیادہ کمائی کے لیے ہر ہفتے 10 گھنٹے کام کرنا چاہیے۔

حل اعادہ مشق 2

1- درج ذیل سوالات کے دیے گئے چار ممکنہ جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) مساوات $2x^2 - x + 1 = 0$ کی قسم ہے:

- (a) دو درجی (b) ایک درجی (c) سہ درجی (d) خالص دو درجی

(ii) $x^2 + 5x - 5 = 0$ کا فرق کنندہ کیا ہے؟

- (a) -20 (b) 20 (c) 25 (d) 45

(iii) $3x^2 - 9 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

- (a) {3} (b) {±3} (c) {√3 ±} (d) {√3}

(iv) $3x^2 + 5x - 12 = 0$ کے روٹس کا مجموعہ ہے:

- (a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{12}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$

(v) $3x^2 + 5x - 12 = 0$ کے روٹس کا حاصل ضرب ہے:

- (a) -4 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(vi) $(x-3)(x+3) = 0$ کے روٹس ہیں:

- (a) 3, -3 (b) 3, 3 (c) -3, -3 (d) 9, 0

(vii) 2 اور 3 کے روٹس ہیں:

(a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (b) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (d) $x^2 + 6x - 5 = 0$

(viii) اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور مکمل مربع ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہیں:

- (a) مساوی (b) غیر مساوی (c) خیالاتی (d) غیر ناطق

(ix) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس ہیں:

- (a) غیر مساوی (b) غیر ناطق (c) خیالاتی (d) مساوی

(x) $x - 2c = b$ کا سبجیکٹ "c" ہے:

- (a) $x + b$ (b) $b - x$ (c) $\frac{x - b}{2}$ (d) $\frac{b - x}{2}$

جوابات

(i) دو درجی (ii) 45 (iii) {±√3} (iv) $-\frac{5}{3}$ (v) -4

(vi) 3, -3 (vii) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (viii) غیر مساوی (ix) مساوی (x) $\frac{x - b}{2}$

2- درج ذیل دو درجی مساواتوں کو بذریعہ تجزی، تکمیل مربع اور دو درجی کلیہ حل کیجیے۔

(i) $8x^2 = x + 7$

$8x^2 = x + 7$

بذریعہ تجزی

حل:

$$8x^2 - 8x + 7x - 7 = 0$$

$$8x(x-1) + 7(x-1) = 0$$

$$(x-1)(8x+7) = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{یا} \quad 8x+7=0$$

$$x=1 \quad \text{یا} \quad 8x=-7$$

$$x = -\frac{7}{8}$$

پس، حل سیٹ $\left\{1, -\frac{7}{8}\right\}$

مکمل مربع کے ذریعے سے

$$8x^2 = x + 7$$

دونوں اطراف کو 8 سے تقسیم کرنے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{8x^2}{8} = \frac{x}{8} + \frac{7}{8}$$

$$x^2 = \frac{x}{8} + \frac{7}{8}$$

$$x^2 - \frac{x}{8} = \frac{7}{8}$$

دونوں اطراف کو $\left(\frac{1}{16}\right)^2$ سے ضرب دینے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - \frac{x}{8} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{7}{8} + \left(\frac{1}{16}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{7}{8} + \frac{1}{256}$$

$$\left(x - \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{224+1}{256}$$

$$\left(x - \frac{1}{16}\right)^2 = \frac{225}{256}$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{256}}$$

$$x - \frac{1}{16} = \pm \frac{15}{16}$$

$$x - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \quad \text{یا} \quad x - \frac{1}{16} = -\frac{15}{16}$$

$$x = \frac{15}{16} + \frac{1}{16} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{15}{16} + \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{16}{16} = 1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{-14}{16} = -\frac{7}{8}$$

حل سیٹ = $\left\{1, -\frac{7}{8}\right\}$

دو درجی کلیہ کے ذریعے سے

$$8x^2 = x + 7$$

$$8x^2 - x - 7 = 0 \quad (\text{دیا گیا ہے})$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات کا معیاری شکل کے ساتھ موازنہ کرنے سے

$$a = 8, b = -1, c = -7$$

دو درجی کلیہ میں a, b, c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(8)(-7)}}{2(8)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+224}}{16}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{16} = \frac{1 \pm 15}{16}$$

$$x = \frac{1+15}{16}, \quad x = \frac{1-15}{16}$$

$$x = \frac{16}{16} = 1, \quad x = \frac{-14}{16} = -\frac{7}{8}$$

حل سیٹ = $\left\{1, -\frac{7}{8}\right\}$

(ii) $2x^2 - x - 10 = 0$

حل: بذریعہ تجزی

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 4x - 10 = 0$$

$$x(2x-5) + 2(2x-5) = 0$$

$$(2x-5)(x+2) = 0$$

$$2x-5=0 \quad \text{یا} \quad x+2=0$$

$$2x=5 \quad \text{یا} \quad x=-2$$

$$x = \frac{5}{2}$$

پس، $\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}$

تکمیل مربع کے ذریعے سے

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{10}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - \frac{x}{2} - 5 = 0$$

$$x^2 - \frac{x}{2} = 5$$

ہم x کے عددی سر کے نصف کا مربع یعنی $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ مساوات

کے دونوں طرف جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 5 + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{80+1}{16}$$

دونوں طرف کا جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16}}$$

$$x - \frac{1}{4} = \pm \frac{9}{4}$$

$$8x^2 - x - 7 = 0$$

$$x - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad \text{یا} \quad x - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$x = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{8}{4} = -2$$

پس، $\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}$

دو درجی کلیہ کے ذریعے سے

$$2x^2 - x - 10 = 0 \quad (\text{دیا گیا ہے})$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{معیاری شکل})$$

دی گئی مساوات کا معیاری شکل کے ساتھ موازنہ کرنے سے

$$a = 2, b = -1, c = -10$$

دو درجی کلیہ میں a, b, c اور کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{4} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{1+9}{4}, \quad x = \frac{1-9}{4}$$

$$x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad x = -\frac{8}{4} = -2$$

پس، $\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{5}{2}, -2 \right\}$

3- ایک دو درجی مساوات بنائیے جس کے روٹس 6 اور $\frac{3}{2}$ ہوں۔

حل: دیے گئے روٹس 6 اور $\frac{3}{2}$ ہیں۔

$$S = \frac{3}{2} + 6 = \frac{12+3}{2} = \frac{15}{2} \quad (i)$$

$$P = \text{دیے گئے روٹس کا حاصل ضرب} = (6) \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{18}{2} = 9 \quad (\text{ii})$$

مطلوبہ دو درجی مساوات ہے

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مساوات (i) اور (ii) سے S اور P کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x^2 - \frac{15}{2}x + 9 = 0$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب دینے سے

$$2(x^2) - 2\left(\frac{15}{2}x\right) + 2(9) = 2(0)$$

$$2x^2 - 15x + 18 = 0$$

4- درج ذیل مساواتوں کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے:

(i) $15x^2 + 11x + 2 = 0$

$$15x^2 + 11x + 2 = 0$$

$$a = 15, b = 11, c = 2$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

$$= (11)^2 - 4(15)(2)$$

$$= 121 - 120$$

$$= 1 = (1)^2 > 0$$

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور مکمل مربع ہے۔ اس لیے روٹس حقیقی، نامطلق اور غیر مساوی ہیں۔

(ii) $x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -1$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(-1)$$

$$= 1 + 4$$

$$= 5 > 0 \text{ اور مکمل مربع نہیں ہے}$$

پس، روٹس غیر نامطلق (حقیقی) اور غیر مساوی ہیں۔

5- اگر ایک گیند کو v ولاسٹی سے اوپر پھینکا جائے تو زیادہ سے زیادہ بلندی (h) ہے جس پر وہ پہنچ سکتی ہے اور اسے کلیہ $h = \frac{v^2}{2g}$

کے ذریعے معلوم کی جاسکتی ہے۔ کلیہ کو اس طرح ترتیب دیں کہ v کو سبجیکٹ بنایا جاسکے۔

$$h = \frac{v^2}{2g} \text{ یا } \frac{v^2}{2g} = h$$

$$v^2 = 2gh$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

6- حل: $x^2 + 2(1+k)x + k^2 = 0$ کے روٹس مساوی ہوں تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

$$x^2 + 2(1+k)x + k^2 = 0$$

$$a = 1, b = 2(1+k), c = k^2$$

(جیسا کہ روٹس برابر ہیں) $0 = \text{فرق کنندہ}$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\{2(1+k)\}^2 - 4(1)(k^2) = 0$$

$$4(1+2k+k^2) - 4k^2 = 0$$

$$4 + 8k + 4k^2 - 4k^2 = 0$$

$$4 + 8k = 0$$

$$8k = -4$$

$$k = -\frac{4}{8}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

معروضی طرز سوالات

اضافی کثیر الانتخابی سوالات

2.1 (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے کثیر الانتخابی سوالات

کلیکس اعداد

2.1

درست جواب کا انتخاب کریں۔

1- کثیررتی $-x + 5x^2 - 7$ کا درجہ ہے:

- (a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) -7

2- دو درجی مساوات ایک متغیر میں کتنے درجہ کی کثیررتی ہوتی ہے؟

- (a) ایک (b) دو (c) تین (d) صفر

3- ایک متغیر x میں دو درجی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

- (a) $ax + b = 0$ (b) $ax^3 + bx^2 + c = 0$ (c) $ax^2 + bx + c = 0$ (d) $a^2 + x = c$

4- اگر مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں $a = 0$ ہو تو مساوات بن جاتی ہے۔

- (a) یک درجی مساوات (b) دو درجی مساوات (c) ایک خالص مساوات (d) مکعب والی مساوات

5- $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل والی مساوات خالص مساوات بنتی ہے جب:

- (a) $a = 0$ (b) $x = 0$ (c) $c = 0$ (d) $b = 0$

2.1.1 دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا $a, b, c \in R$ اور $a \neq 0$

6- "صفر حاصل ضرب کی خاصیت" بتاتی ہے کہ $a, b \in R$ اور $ab = 0$ ہو تو:

- (a) $a = 0$ (b) $b = 0$

(a) a اور b لازمی دونوں صفر ہوں

(c) a برابر ہونا چاہیے b کے

(d) $a + b$ لازمی صفر ہونا چاہیے

7- درج دوم کی مساوات کے روٹس ہوتے ہیں:

(d) ایک

(c) صفر

(b) تین

(a) دو

8- ان میں سے کسری مساوات کون سی ہے؟

(d) $x + 3 = 0$ (c) $ax^2 + bx + c = 0$ (b) $x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = a$ (a) $\frac{2}{5}x + \frac{6}{x} + 4 = 0$

9- مساوات $2x^2 - 11x + 12 = 0$ کا حل سیٹ ہے:

(d) $\{1, -5\}$ (c) $\{-3, \frac{1}{3}\}$ (b) $\{0, 4\}$ (a) $\{\frac{3}{2}, 4\}$

10- $3x^2 - 32 = -10x$ کے عددی سر کو ایک بنانے کے لیے ہمیں کرنا ہوگا:

(a) طرفین سے 3 تقسیم کرنے سے

(b) ہر رقم کو 3 پر تقسیم کرنے سے

(c) ہر رقم کو 10 سے ضرب کرنے سے

(d) عدد 3 کا مربع لینے سے

11- $(x + \frac{5}{3})^2 = \frac{121}{9}$ کی طرفین کا جذر المربع لینے سے حاصل ہوگا:

(d) $x + \frac{25}{9} = \frac{11}{3}$ (c) $x^2 = \frac{121}{9}$ (b) $x + \frac{5}{3} = \pm \frac{11}{3}$ (a) $\frac{x + \frac{5}{3}}{3} = \frac{11}{3}$

12- $ax^2 + bx + c = 0$ موازنہ کرنے سے کس کے متضاد ہوگی؟

(d) $\frac{a}{b}x^2 + bx + c = 0$ (c) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ (b) $2x^2 + \frac{b}{a}x + c = 0$ (a) $x^2 + bx = -c$

13- مساوات $3x^2 + 7x - 6 = 0$ کے لیے کون سا بیان درست ہے؟

(d) $a=3, b=7, c=-6$ (c) $a=-6, b=7, c=3$ (b) $a=3, b=6, c=7$ (a) $a=7, b=3, c=0$

14- دو درجی تعامل کی راسی شکل ہے:

(d) $(x-h)(x-k)$ (c) $a(x-h)^2 + k$ (b) $x = -\frac{b}{a}$ (a) $ax^2 + bx + c = 0$

15- دو درجی مساوات کا گراف کہلاتا ہے:

(d) دائرہ (c) بیضی شکل (b) ہائپر بولا (a) پیرابولا

گراف کے طریقہ سے نقطہ/نقاط تقاطع معلوم کرنا

2.2

16- دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا حل بذریعہ گراف معلوم کرنے کے لیے ہم سب سے پہلے _____ کا گراف بناتے ہیں:

(a) ایک درجی تعامل (b) دو درجی تعامل (c) سہ درجی تعامل (d) چار درجی تعامل

17- بذریعہ گراف $x + y = 6$ اور $3x + y = 12$ کا نقطہ تقاطع ہے:

(d) $M(0, 12)$ (c) $M(3, 3)$ (b) $M(0, 6)$ (a) $M(2, 6)$

18- خط مستقیم کا گراف بنانے کے لیے دو مختلف معلوم ہونا ضروری ہے۔

- (a) خطوط (b) مبدا (c) مساواتیں (d) نقاط

2.3 دو درجی مساوات کے روٹس اور عددی سروں کے درمیان تعلق

19- کون سا فارمولہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے روٹس کے مجموعہ کو ظاہر کرتا ہے:

- (a) $\frac{b}{a}$ (b) $-\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{c}{a}$

20- $2x^2 + 5x - 7 = 0$ کے روٹس کا حاصل ضرب ہے:

- (a) $\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) $\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{7}{2}$

21- مساوات $5x^2 - 6x + 1 = 0$ میں روٹس کا مجموعہ ہے:

- (a) $\frac{6}{5}$ (b) $-\frac{6}{5}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $-\frac{1}{5}$

22- اگر α اور β مساوات $7x^2 - 4x - 8 = 0$ کے روٹس ہوں تب $\alpha + \beta$ ہے۔

- (a) $\frac{8}{7}$ (b) $-\frac{4}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $-\frac{8}{7}$

23- دو درجی مساوات بنانے کے لیے کلیہ ہے:

- (a) $x^2 + Sx + P = 0$ (b) $x^2 - Sx - P = 0$ (c) $x^2 - Sx + P = 0$ (d) $x^2 + Sx - P = 0$

24- کون سی مساوات روٹس 4 اور 5 رکھتی ہے۔

- (a) $x^2 - 9x + 20 = 0$ (b) $x^2 + 9x - 20 = 0$ (c) $x^2 - 9x - 20 = 0$ (d) $x^2 + 20x + 9 = 0$

25- $(x - 5)(x + 7) = 0$ کے روٹس ہیں:

- (a) -7 (b) $-5, 7$ (c) $1, 7$ (d) $5, -7$

2.4 دو درجی مساوات کا فرق کنندہ

26- جملہ $b^2 - 4ac$ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں کہلاتا ہے:

- (a) متغیر (b) مستقل (c) عددی سر (d) فرق کنندہ

27- اگر $b^2 - 4ac > 0$ اور ایک مکمل مربع ہو تو روٹس ہوتے ہیں:

- (a) ناطق (حقیقی) اور غیر مساوی (b) غیر ناطق اور غیر مساوی (c) خیالاتی اور غیر مساوی (d) ناطق اور مساوی

28- جب $b^2 - 4ac = 0$ ہوں تب روٹس ہیں:

- (a) خیالاتی (b) غیر ناطق اور غیر مساوی (c) حقیقی اور مساوی (d) حقیقی اور غیر مساوی

29- فرق کنندہ کے مطابق درج ذیل میں سے کون سا غیر ناطق اور حقیقی ہے؟

- (a) $\sqrt{25}$ (b) $\sqrt{7}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$

30- اگر روٹس خیالاتی (کمپلیکس کانجوگیٹ) ہوں تو فرق کنندہ لازمی ہوگا:

- (a) مثبت (b) صفر (c) منفی (d) مکمل مربع

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \text{ کا فرق کنندہ ہوگا: } -31$$

16 (d)

17 (c)

4 (b)

0 (a)

$$2x^2 + 3x + 4 = 0 \text{ کا فرق کنندہ ہوگا: } -32$$

12 (d)

-23 (c)

24 (b)

23 (a)

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ اگر } ax^2 + bx + c \text{ کے روٹس ناطق ہیں تب } b^2 - 4ac \text{ ضرور ہوگا: } -33$$

مکعب (d)

منفی (c)

مکمل مربع (b)

مثبت (a)



ایک متغیر میں دو درجی غیر مساوات کا حل

2.5

-34 درج ذیل میں سے کون سی علامت غیر مساوات کے لیے نہیں ہے؟

< (d)

= (c)

> (b)

≤ (a)

-35 کیا معلوم کرنے کے لیے دو درجی جملے $x^2 - 5x + 6 > 0$ کو صفر کے برابر رکھیں:

-y قاطع (d)

روٹس (c)

مکعب (b)

مربع (a)

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ کے حل کے دو اہم نقاط ہیں: } -36$$

x = 5, x = 6 (d)

x = 0, x = 6 (c)

x = -2, x = -3 (b)

x = 2, x = 3 (a)

-37 ہم کھلا وقفہ (a, b) اس وقت استعمال کرتے ہیں جب مساوات میں علامت ہو:

≤ یا < (d)

[a, b] (c)

> یا > (b)

< اور < (a)

-38 ہم بند وقفہ [a, b] اس وقت استعمال کرتے ہیں جب مساوات میں علامت ہو:

> (d)

= (c)

< یا < (b)

≤ یا ≤ (a)

$$3x^2 - 5x + 7 \leq 0 \text{ کی متعلقہ مساوات ہے: } -39$$

$$3x^2 = -5x + 7 \text{ (d)}$$

$$3x^2 - 5x + 7 = 0 \text{ (c)}$$

$$3x - 5x^2 - 7 = 0 \text{ (b)}$$

$$3x^2 + -7 = -7 \text{ (a)}$$

کلیے کا سبجیکٹ تبدیل کرنا

2.6

$$I = PRT \text{ کا سبجیکٹ T ہے: } -40$$

$$\frac{I}{PR} \text{ (d)}$$

$$PRT \text{ (c)}$$

$$\frac{IR}{P} \text{ (b)}$$

$$IPR \text{ (a)}$$

$$P = 2(l + w) \text{ کا سبجیکٹ w ہے: } -41$$

$$Plw \text{ (d)}$$

$$\frac{Pl - w}{2} \text{ (c)}$$

$$l - w \text{ (b)}$$

$$\frac{P - 2l}{2} \text{ (a)}$$

$$S = 2a + (n - 1)d \text{ کا سبجیکٹ d ہے: } -42$$

$$\frac{S + 2a}{n - 1} \text{ (d)}$$

$$\frac{S - 2a}{n - 1} \text{ (c)}$$

$$\frac{3 - 2d}{n - 1} \text{ (b)}$$

$$\frac{S + 2l}{n} \text{ (a)}$$

$$y^2 = 4ax \text{ کا سبجیکٹ x ہے: } -43$$

$$4ay^2 = 0 \text{ (d)}$$

$$\frac{y^2}{a} = 4 \text{ (c)}$$

$$\frac{y^2}{4a} \text{ (b)}$$

$$y^2 = 4a \text{ (a)}$$

$$P = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) + mgt \quad -44$$

$$\frac{P - m(v_1^2 - v_2^2)}{mg} \quad (d) \quad \frac{2P + m(v_1^2 - v_2^2)}{2mg} \quad (c) \quad \frac{P}{mg} \quad (b) \quad \frac{2P - m(v_1^2 - v_2^2)}{2mg} \quad (a)$$

$$V = u + aw \text{ اگر } w = \text{_____} \quad -45$$

$$\frac{V - u}{a} \quad (d) \quad \frac{V + u}{a} \quad (c) \quad \frac{a}{V - u} \quad (b) \quad V - u - a \quad (a)$$

$$A = \frac{1}{2}bh \text{ اگر } h = \text{_____} \quad -46$$

$$\frac{b}{2A} \quad (d) \quad 2Ab \quad (c) \quad \frac{2A}{b} \quad (b) \quad \frac{A}{2b} \quad (a)$$

$$y = 3x - 5 \text{ کا سبکیٹ } x = \text{_____} \quad -47$$

$$(a) 3y + 5 \quad (b) \frac{y-5}{3} \quad (c) \frac{y+5}{3} \quad (d) \frac{y}{3} + 5$$

حقیقی دنیا میں دو درجی مساوات کا اطلاق

2.7

$$V_f = \text{_____} \text{ خط مستقیم میں حرکت کرنے والی اشیاء کے لیے} \quad -48$$

$$v_i - at \quad (d) \quad v_i + at \quad (c) \quad v_i^2 + 2as \quad (b) \quad \frac{1}{2}at^2 \quad (a)$$

$$S = \text{_____} \text{ خط مستقیم میں حرکت کرنے والی اشیاء کے لیے} \quad -49$$

$$v_i t + at^2 \quad (d) \quad 2as \quad (c) \quad v_i + at \quad (b) \quad v_i t + \frac{1}{2}at^2 \quad (a)$$

$$v_f = v_i + at \text{ استعمال کرتے ہوئے } t \text{ کی قیمت کیا ہوگی اگر } a = -2, v_f = 0 \text{ اور } v_i = 30 \quad -50$$

$$30 \quad (d) \quad 0 \quad (c) \quad 10 \quad (b) \quad 15 \quad (a)$$

$$\text{ہم اس سے بھی راس معلوم کر سکتے ہیں:} \quad -51$$

$$x = \frac{-b}{2a}, y = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad (d) \quad x = \frac{h}{c}, y = hx \quad (c) \quad x = 2b, y = f \quad (b) \quad x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{a} \quad (a)$$

اجابات

$$b = 0 \quad -5 \quad \text{ایک درجی مساوات} \quad -4 \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad -3 \quad \text{,,} \quad -2 \quad 2 \quad -1$$

$$-10 \quad \text{ہر رقم کو 3 پر تقسیم کرنے سے} \quad \left\{\frac{3}{2}, 4\right\} \quad -9 \quad \frac{2}{5}x + \frac{6}{x} + 4 = 0 \quad -8 \quad \text{,,} \quad -7 \quad b = 0, a = 0 \quad -6$$

$$a = 3, b = 7, c = -6 \quad -13 \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad -12 \quad x + \frac{5}{3} = \pm \frac{11}{3} \quad -11$$

$$-18 \quad \text{نقطہ} \quad M(3, 3) \quad -17 \quad \text{دو درجی مساواتیں} \quad -16 \quad a(x - h)^2 + k \quad -15 \quad \text{پیرابولا} \quad -14$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad -23 \quad \frac{4}{7} \quad -22 \quad \frac{6}{5} \quad -21 \quad \frac{-7}{2} \quad -20 \quad \frac{-b}{a} \quad -19$$

-27	ناطق (حقیقی) اور غیر مساوی	-26	فرق کنندہ	-25	5, -7	-24	$x^2 - 9x + 20 = 0$
-32	-23	-31	0	-30	منفی	-28	حقیقی اور مساوی
-37	$> یا <$	-36	$x = 2, x = 3$	-35	مثبت	-33	ثبت
-41	$\frac{P-2\ell}{2}$	-40	$\frac{1}{PR}$	-39	$3x^2 - 5x + 7 = 0$	-38	$\geq یا \leq$
-46	$\frac{2A}{b}$	-45	$\frac{v-u}{a}$	-44	$\frac{2P-m(v_1^2-u_2^2)}{2mg}$	-43	$\frac{y^2}{4a}$
-51	$x = \frac{-b}{2a}, y = f(\frac{-b}{2a})$	-50	15	-49	$v_i t + \frac{1}{2}at^2$	-48	$v_i + at$
						-47	$\frac{y+5}{3}$

اضافی مختصر سوالات

مختصر سوالات کی نئی امتحانی تکنیکس (Knowledge, Understanding, Application, Analytical & Conceptual) کی روشنی میں مرتب کیے گئے مختصر جوابی سوالات

دو درجی مساوات

2.1



مختصر جواب دیں۔

1- دو درجی مساوات کیا ہوتی ہے؟

جواب: دو درجی مساوات ایک متغیر میں درجہ دو کی کثیررتی مساوات ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر $2x^2 + 3x + 7 = 0$

2- دو درجی مساوات کی معیاری شکل کیا ہے؟

جواب: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے۔ جبکہ $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$

3- خالص دو درجی مساوات کیا ہے؟

جواب: اگر $b = 0$ ہو تو دو درجی مساوات خالص بن جاتی ہے۔

مثال کے طور پر $ax^2 + c = 0$

4- صفر حاصل ضرب خاصیت کیا ہے؟

جواب: اگر $(x + m) = 0$ یا $(x + \ell) = 0$ ہو تو $x + m = 0$ یا $x + \ell = 0$ ہے۔ اسے صفر حاصل ضرب خاصیت کہتے ہیں۔

5- دو درجی مساوات $5(2x + 3) = -9x^2$ کو معیاری شکل میں لکھیں۔

جواب: $5(2x + 3) = -9x^2$

$$10x + 15 = -9x^2$$

$$9x^2 + 10x + 15 = 0$$

2.1.1 دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا حل $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$

6- مساوات کو بذریعہ تجزی حل کریں $9x^2 - 12x - 5 = 0$

حل:

$$9x^2 - 12x - 5 = 0$$

$$9x^2 - 15x + 3x - 5 = 0$$

$$3x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$$

$$(3x - 5)(3x + 1) = 0$$

$$3x - 5 = 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 1 = 0$$

$$3x = 5 \quad \text{یا} \quad 3x = -1$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{1}{3}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right\} \quad \text{پس،}$$

-7
حل: تجزی کے ذریعے مساوات $x^2 + 2x - 35 = 0$ کو حل کریں۔

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$$

$$x(x + 7) - 5(x + 7) = 0$$

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

$$x + 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -7 \quad \text{یا} \quad x = +5$$

$$\text{حل سیٹ} = \{-7, +5\}$$

-8
حل: تکمیل مربع کے ذریعے سے مساوات $x^2 - 2x - 889 = 0$ کو حل کریں۔

$$x^2 - 2x - 889 = 0$$

$$x^2 - 2x = +889$$

ہم x کے عددی سر کے نصف کا مربع یعنی $(1)^2$ مساوات کے دونوں طرف جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - 2x + (1)^2 = 889 + (1)^2$$

$$(x - 1)^2 = 890$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{890}$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{890}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{890}$$

$$\text{حل سیٹ} = \{1 \pm \sqrt{890}\} \quad \text{پس،}$$

-9
حل: $x^2 - 4x - 5 = 0$ کو تکمیل مربع کے ذریعے حل کریں۔

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x = 5$$

ہم x کے عددی سر کے نصف کا مربع یعنی $(2)^2$ مساوات کے دونوں طرف جمع کرتے ہیں۔

$$x^2 - 4x + (2)^2 = 5 + (2)^2$$

$$(x - 2)^2 = 5 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 9$$

دونوں اطراف کا جذر المربع لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{9}$$

$$x - 2 = \pm 3$$

$$x - 2 = -3$$

$$x - 2 = 3 \text{ یا } x = -3 + 2$$

$$x = 3 + 2 \text{ یا } x = -1$$

$$x = 5$$

$$\text{حل سیٹ} = \{5, -1\}$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ (دیا گیا ہے)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (معیاری شکل)}$$

$$a = 1, b = -5, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{حل سیٹ} = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right\} \text{، پس}$$

$$3x^2 - 32 = -10x$$

$$3x^2 + 10x - 32 = 0 \text{ (دیا گیا ہے)}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (معیاری شکل)}$$

$$a = 3, b = 10, c = -32$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(3)(-32)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 384}}{6}$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ کو دو درجی کلیہ کے ذریعے حل کریں۔}$$

حل:

دی گئی مساوات کا معیاری شکل کے ساتھ موازنہ کرنے سے

دو درجی کلیہ میں a, b, c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$3x^2 - 32 = -10x \text{ مساوات کو دو درجی مساوات کے کلیہ سے حل کریں۔}$$

حل:

دی گئی مساوات کا معیاری شکل کے ساتھ موازنہ کرنے سے

دو درجی کلیہ میں a, b, c کی قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{6}$$

$$x = \frac{-10 \pm 22}{6}$$

$$x = \frac{-10 + 22}{6} \quad x = \frac{-10 - 22}{6}$$

$$x = \frac{12}{6} = 2 \quad x = -\frac{32}{6} = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$$

پس، $\{2, -5\frac{1}{3}\}$ = حل سیٹ

گراف کے طریقہ سے نقطہ/نقاط تقاطع معلوم کرنا

2.2

12- $y = 2 + 3x$ کا محدوداتی محوروں کے ساتھ تقاطع کے نقاط بذریعہ گراف معلوم کیجیے۔

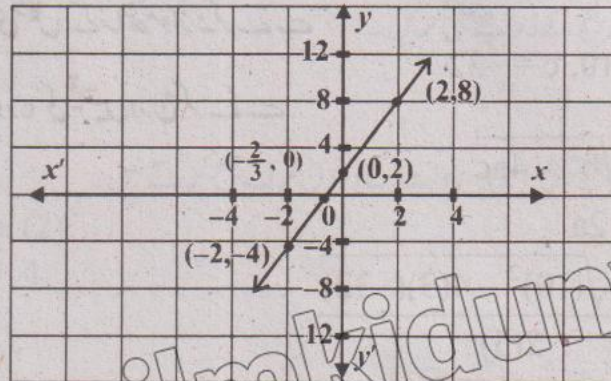
حل: $y = 2 + 3x$ ایک خط کی مساوات ہے۔

ہم $y = 2 + 3x$ کا گراف بناتے ہیں۔

$y = 2 + 3x$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = 2 + 3x$	نقاط (x, y)
-2	$y = 2 + 3(-2)$ $= 2 - 6 = -4$	$(-2, -4)$
$-\frac{2}{3}$	$y = 2 + 3\left(-\frac{2}{3}\right)$ $= 2 - 2 = 0$	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$
0	$y = 2 + 3(0)$ $= 2 + 0 = 2$	$(0, 2)$
2	$y = 2 + 3(2)$ $= 2 + 6 = 8$	$(2, 8)$

ہم نقاط $(-2, -4)$ ، $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ ، $(0, 2)$ اور $(2, 8)$ کو مرتب کرتے ہیں اور ان نقاط کو ملاتے ہیں۔



-x محور پر نقطہ تقاطع $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ اور -y محور پر نقطہ تقاطع $(0, 2)$ ہے۔

13- خطی مساوات $2x + y = 5$ کے گراف کا محوروں کے ساتھ نقطہ تقاطع معلوم کریں۔

حل: $y = -2x + 5$ ایک خطی مساوات ہے۔

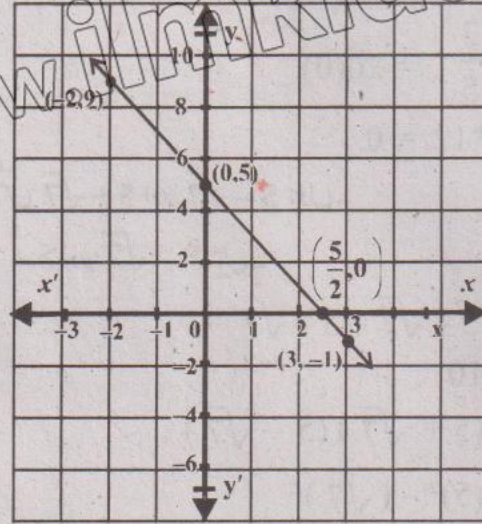
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 5 - 2x \end{cases}$$

ہم $2x + y = 5$ کا گراف بناتے ہیں۔

$y = 5 - 2x$ کے لیے قدروں کا جدول

x	$y = 5 - 2x$	نقاط (x,y)
-2	$y = 5 - 2(-2)$ $= 5 + 4 = 9$	(-2, 9)
0	$y = 5 - 2(0)$ $= 5 - 0 = 5$	(0, 5)
$\frac{5}{2}$	$y = 5 - 2\left(\frac{5}{2}\right)$ $= 5 - 5 = 0$	$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$
3	$y = 5 - 2(3)$ $= 5 - 6 = -1$	(3, -1)

نقاط $(-2, 9)$ ، $(0, 5)$ ، $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ اور $(3, -1)$ کو ملاتے ہیں۔



یہ اس مساوات کے گراف کے x محور پر نقطہ تقاطع $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ہے اور y محور کے ساتھ نقطہ تقاطع $(0, 5)$ ہے

دو درجی مساوات کے روش اور عددی سروں کے درمیان تعلق

2.3

14- دو درجی مساوات کے روش کا حاصل ضرب معلوم کرنے کا کلیہ لکھیں۔

جواب: روش کے حاصل ضرب (P) کا کلیہ یوں ہے۔

$$P = \frac{c}{a}$$

15- دو درجی مساوات کے روٹس کا مجموعہ معلوم کرنے کا کلیہ لکھیں۔

جواب: دو درجی مساوات کے روٹس (S) معلوم کرنے کا کلیہ یوں ہے۔

$$S = \frac{-b}{a}$$

16- ایسی مساوات بنائیے۔ جس کے روٹس $\frac{3}{4}$ اور $\frac{4}{5}$ ہوں

حل:

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

$$= \frac{15+16}{20} = \frac{31}{20}$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

مطلوبہ مساوات ہے

$$x^2 - Sx + P = 0$$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - \frac{31}{20}x + \frac{3}{5} = 0$$

مساوات کے دونوں طرف کو 20 سے ضرب دینے سے

$$20(x^2) - 20\left(\frac{31}{20}x\right) + 20\left(\frac{3}{5}\right) = 20(0)$$

$$20x^2 - 31x + 12 = 0$$

17- ایسی مساوات بنائیے جس کے روٹس $5 + \sqrt{7}$ اور $5 - \sqrt{7}$ ہوں۔

حل: مطلوبہ مساوات کے روٹس $5 + \sqrt{7}$ اور $5 - \sqrt{7}$ ہیں۔

$$S = \text{روٹس کا مجموعہ} = 5 + \sqrt{7} + 5 - \sqrt{7}$$

$$= 10$$

$$P = \text{روٹس کا حاصل ضرب} = (5 + \sqrt{7})(5 - \sqrt{7})$$

$$= (5)^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= 25 - 7 = 18$$

مطلوبہ مساوات ہے

$$x^2 - Sx + P = 0$$

S اور P کی قیمتیں درج بالا مساوات میں درج کرنے سے

$$x^2 - 10x + 18 = 0$$

18- اگر α اور β مساوات $3x^2 - 3x + 5 = 0$ کے روٹس ہوں تو $\alpha^2 + \beta^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں $a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$

دی گئی مساوات $3x^2 - 3x + 5 = 0$ ہے۔

$$a = 3, b = -3, c = 5$$

یہاں،
جیسا کہ α, β دی گئی مساوات $3x^2 - 3x + 5 = 0$ کے ریش ہیں۔

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{3} = 1 \quad \text{اس لیے}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \quad \text{اب،}$$

$$= (1)^2 - 2 \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$= 1 - \frac{10}{3}$$

$$= \frac{3-10}{3} = \frac{-7}{3}$$

19- اگر α اور β مساوات $x^2 - 3x - 11 = 0$ کے ریش ہیں تو $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a = 1, b = -3, c = -11$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \quad \text{اس لیے}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-11}{1} = -11$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \quad \text{اب،}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{3}{-11} = -\frac{3}{11}$$

20- مساوات $3x^2 - 11x + 7 = 0$ کے ریش کا مجموعہ اور حاصل ضرب معلوم کریں۔

حل: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں $a \neq 0$ اور $a, b, c \in \mathbb{R}$ جبکہ

$$3x^2 - 11x + 7 = 0$$

$$a = 3, b = -11, c = 7 \quad \text{یہاں}$$

$$S = \text{ریش کا مجموعہ} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{3} = \frac{11}{3}$$

$$P = \text{ریش کا حاصل ضرب} = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$$

$$= (-8)^2 - 4(3)(16) \\ = 64 - 192 = -128 < 0.$$

جو کہ منفی ہے، اس لیے روٹس خیالاتی اور غیر مساوی ہیں۔

$$25x^2 - 30x + 9 = 0 \quad -28$$

$$25x^2 - 30x + 9 = 0 \\ a = 25, b = -30, c = 9$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

$$= (-30)^2 - 4(25)(9) \\ = 900 - 900 = 0$$

چونکہ فرق کنندہ صفر (0) ہے، اس لیے روٹس حقیقی اور مساوی ہیں۔

$$5x^2 - x - 2 = 0 \quad -29$$

$$5x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 5, b = -1, c = -2$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(5)(-2) \\ = 1 + 40 = 41 > 0$$

چونکہ فرق کنندہ مثبت اور نامکمل مربع ہے۔ لہذا روٹس غیر ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad -30$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$a = 1, b = -7, c = 12$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

$$= (-7)^2 - 4(1)(12) = 49 - 48 \\ = 1(1)^2 > 0$$

جو کہ ایک مکمل مربع ہے۔

پس روٹس ناطق اور غیر مساوی ہیں۔

2.5 ایک متغیر میں دو درجی غیر مساوات کا حل

$$-31 \quad \text{دو درجی غیر مساوات کو حل کرنے کے چار اقدامات کون کون سے ہیں۔}$$

جواب: دو درجی غیر مساوات کو حل کرنے کے چار اقدامات درج ذیل ہیں۔

(i) متعلقہ مساوات کو حل کرنا (ii) وقفوں کا تعین کرنا

(iii) ہر وقفے میں ٹیسٹ پوائنٹ لینا (iv) نتیجہ اخذ کرنا

$$-32 \quad \text{اگر غیر مساوات } x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ ایک دو متعلقہ درجی}$$

$$\text{مساوات } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ کے روٹس } x = 2 \text{ اور } x = 3$$

ہوں تو عددی خط پر وقفوں کی تقسیم کیا ہوگی؟

$$\text{جواب: اگر غیر مساوات } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ کی ایک متعلقہ دو درجی}$$

$$\text{مساوات } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ کے روٹس } x = 2 \text{ اور } x = 3$$

ہوں تو یہ عددی خط کو تین وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

21- اگر متعلقہ مقدار صفر ہو تو روٹس کے حاصل ضرب کیا ہوگا؟

حل: اگر $c = 0$ ہو تو روٹس حاصل ضرب بھی صفر ہی ہوگا۔

$$P = \frac{c}{a} = \frac{0}{a} = 0$$

$$-22 \quad \text{مساوات } 5x^2 - 10 = 0 \text{ میں روٹس کا مجموعہ کیا ہوگا؟}$$

حل: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں

$a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ جبکہ

$$5x^2 - 10 = 0$$

$$5x^2 - 10 = 5x^2 + 0x - 10 = 0$$

$$a = 5, b = 0 \text{ اور } c = -10$$

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{0}{5} = 0$$

پس، روٹس کا مجموعہ صفر (0) ہے۔

$$-23 \quad 3x^2 - x - 17 = 0 \text{ کے روٹس کا مجموعہ اور حاصل ضرب}$$

معلوم کریں۔

حل: دو درجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہے جہاں

$a, b, c \in \mathbb{R}$ اور $a \neq 0$ جبکہ

$$3x^2 - x - 17 = 0$$

$$a = 3, b = -1, c = -17$$

یہاں

$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{-(-1)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{17}{3}$$

2.4 دو درجی مساوات کا فرق کنندہ

2.4

$$-24 \quad \text{مساوات } ax^2 + bx + c = 0 \text{ کا فرق کنندہ کیا ہوگا۔}$$

جواب: اس مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا فرق کنندہ $b^2 - 4ac$ ہے۔

$$-25 \quad \text{اگر } b^2 - 4ac = 0 \text{ ہو تو روٹس کی نوعیت کیا ہوگی؟}$$

جواب: اگر $b^2 - 4ac = 0$ ہو تو روٹس حقیقی اور مساوی ہوتے ہیں۔

$$-26 \quad \text{روٹس کی نوعیت بیان کریں اگر } b^2 - 4ac > 0 \text{ اور ایک مکمل مربع ہو۔}$$

جواب: $b^2 - 4ac > 0$ ہو تو دو روٹس ناطق (حقیقی) اور غیر مساوی ہوتے ہیں۔

$$-27 \quad 3x^2 - 8x + 16 = 0 \text{ کے روٹس کی نوعیت کا جائزہ لیجیے۔}$$

$$3x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$a = 3, b = -8, c = 16$$

$$\text{فرق کنندہ} = b^2 - 4ac$$

38- اگر $I = PRT$ ہو تو 'R' کو اس کلیہ کا سبجیکٹ بنائیں۔

$$I = PRT$$

$$PRT = I$$

$$R = \frac{I}{PT}$$

2.7 حقیقی دنیا میں دو درجی مساوات کا اطلاق

39- ایک گیند ایک پہاڑی سے نیچے $4m/s^2$ کے اسراع سے گرائی جاتی ہے۔ 3 سیکنڈ بعد یہ 30 میٹر کا فاصلہ کرتی ہے اس کی ابتدائی ولاشی معلوم کریں۔

$$a = 4m/s^2, t = 3s, S = 30m$$

متعلقہ حرکت کی مساوات ہے

$$S = v_i t + \frac{1}{2} at^2$$

$$30 = v_i (3) + \frac{1}{2} (4) (3)^2$$

$$30 = 3v_i + 18$$

$$30 - 18 = 3v_i$$

$$12 = 3v_i$$

$$\frac{12}{3} = v_i$$

$$v_i = 4m/s$$

40- خط مستقیم میں یکساں اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والی اشیاء کی مساواتیں لکھیں۔

$$v_f = v_i + at$$

$$S = v_i t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

$$V_i = 20m/s, V_f = 0 \text{ اور } S = 40m$$

متعلقہ حرکت کی مساوات ہے۔

41- اگر $v_i = 20m/s$ اور $S = 40m$ ہو تو اسراع

معلوم کریں۔

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

$$0^2 = (20)^2 + 2a(40)$$

$$0 = 400 + 80a$$

$$-80a = 400$$

$$a = \frac{400}{-80}$$

$$a = -5m/s^2$$

$$x \times 2 \Rightarrow x \in (0, 2)$$

$$x \times x < 3 \Rightarrow x \in (2, 3)$$

$$x \times 3 \Rightarrow x \in (3, \infty)$$

33- غیر مساوات کی علامتیں کون کون سی ہیں؟

جواب: غیر مساوات کی علامتیں درج ذیل ہیں۔

< (کم ہے)، > (کم زیادہ ہے)، $\leq$ (پا مساوی ہے)،

> (زیادہ یا مساوی ہے)

2.6 کلیے کا سبجیکٹ تبدیل کرنا

34- اگر $y^2 = 4ax$ ہو تو 'a' کو مساوات کا سبجیکٹ بنائیے۔

$$y^2 = 4ax$$

$$4ax = y^2$$

$$a = \frac{y^2}{4x}$$

35- اگر $P = 2(\ell + w)$ ہو تو 'w' کو کلیہ کا سبجیکٹ بنائیں۔

$$P = 2(\ell + w)$$

$$2(\ell + w) = P$$

$$\ell + w = \frac{P}{2}$$

$$w = \frac{P}{2} - \ell$$

$$w = \frac{P - \ell}{2}$$

36- اگر $V = \pi r^2 h$ ہو تو 'r' کو کلیہ کا سبجیکٹ بنائیں۔

$$V = \pi r^2 h$$

$$\pi r^2 h = V$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi h}$$

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

37- اگر $S = 2a + (x - 1)d$ ہو تو 'd' کو کلیہ کا سبجیکٹ بنائیں۔

$$S = 2a + (x - 1)d$$

$$2a + (x - 1)d = S$$

$$(x - 1)d = S - 2a$$

$$d = \frac{S - 2a}{x - 1}$$